# Informatik I Übung, Woche 50

Giuseppe Accaputo

10. Dezember, 2015

# Aufgabe 12.2: Rückwärtseinsetzen I

Für $i = n$:

$$x_n = \frac{y_n}{a_{n,n}} \tag{1}$$

Für $i = n-1, \ldots, 1$:

$$x_i = \frac{y_i - (a_{i,i+1} \cdot x_{i+1} + a_{i,i+2} \cdot x_{i+2} + \cdots + a_{i,n} \cdot x_n)}{a_{i,i}} \tag{2}$$

# Aufgabe 12.2: Rückwärtseinsetzen II

Definition: Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (Spaltenvektoren). Das Skalarprodukt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ ist definiert als

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} \tag{3}$$

- $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ist ein Zeilenvektor
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ist ein Spaltenvektor

# Aufgabe 12.2: Rückwärtseinsetzen III

Beispiel $i = 2$:

$$x_2 = \frac{y_2 - (a_{2,3} \cdot x_3 + a_{2,4} \cdot x_4 + \cdots + a_{2,n} \cdot x_n)}{a_{2,2}} \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

# Aufgabe 12.2: Rückwärtseinsetzen IV

Beispiel $i = 2$

- $\mathbf{a} = (a_{2,3}, a_{2,4}, \ldots, a_{2,n})$ ist ein Zeilenvektor in $\mathbb{R}^{1\times(n-i)}$
-

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ist ein Spaltenvektor in} \quad \mathbb{R}^{(n-i)\times 1} \tag{6}$$

- Es folgt also:

$$a_{2,3} \cdot x_3 + a_{2,4} \cdot x_4 + \cdots + a_{2,n} \cdot x_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \tag{7}$$

# Vektorisierte Funktionen I

Eine *vektorisierte Funktion* $\mathtt{f}$ nimmt einen Inputvektor $\mathbf{x}$ entgegen und gibt einen Outputvektor $\mathbf{y}$ zurück:

$$\mathtt{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \tag{8}$$

wobei $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

# Vektorisierte Funktionen II

Sei nun

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad . \tag{9}$$

Dann gilt:

$$\mathtt{f}(\mathbf{x}) = \mathtt{f}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \mathtt{f}(x_1) \\ \vdots \\ \mathtt{f}(x_n) \end{pmatrix} \quad . \tag{10}$$

# Vektorisierten Funktionen III

- `sin`:

$$\texttt{sin}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ \vdots \\ \sin(x_n) \end{pmatrix} \tag{11}$$

- `sqrt`:

$$\texttt{sqrt}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} \\ \vdots \\ \sqrt{x_n} \end{pmatrix} \tag{12}$$

- `cos, log, floor, ...`

# Vektorisierte Arithmetik I

- Übersicht: `http://ch.mathworks.com/help/matlab/matlab_prog/array-vs-matrix-operations.html`
- Addition (+) und Subtraktion (-) sind implizit vektorisiert:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \tag{13}$$

# Vektorisierte Arithmetik II

- Elementweise Multiplizierung (.*):

$$\mathbf{x} \ .* \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ \vdots \\ x_n \cdot y_n \end{pmatrix} \tag{14}$$

- Elementweise Potenzierung (.^):

$$\mathbf{x} \ .\hat{}3 = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ \vdots \\ x_n^3 \end{pmatrix} \tag{15}$$

# Aufgabe 13.1: Integral-Approximation I

Es wird verlangt, das Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ einer Funktion $f$ mittels zusammengesetzter Sehnentrapezformel anzunähern:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h\left(\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_n) + \sum_{i=2}^{n-1} f(a+ih)\right) \quad , \qquad (16)$$

wobei $x_1 = a$, $x_n = b$ und

$$h = \frac{b-a}{n-1} \quad \text{(Abstand zwischen den Stützstellen)} \quad . \qquad (17)$$

- `IntegralNum` nimmt $f$ (`fun`), $a$, $b$, und $n$ als Parameter entgegen

# Aufgabe 13.1: Integral Approximation II

- `x = a:(b-a)/(n-1):b;` ist der Zeilenvektor mit den Stützstellen:

$$\mathtt{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{18}$$

- `y = fun(x);` ist der Zeilenvektor mit den Funktionswerten an den einzelnen Stützstellen, also:

$$\mathtt{y} = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) \tag{19}$$

- Es gilt also (Zugriff auf `y`):

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \mathtt{y(1)} \\ f(x_2) &= \mathtt{y(2)} \\ &\vdots \\ f(x_n) &= \mathtt{y(n)} \end{aligned}$$