

# Physik 2 Zusammenfassung

Frühjahrssemester 2013

Giuseppe Accaputo

Rechnergestützte Wissenschaften, B.Sc.

ETH Zürich

## Energie

### Quantisierung der Energie des Lichts

Jedes Photon hat die Energie

$$E = h\nu \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

### Dispersionsrelation

$$k = \frac{\omega}{c}$$

### Wellennatur der Materie nach De Broglie

$$\text{Impuls: } p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\text{Kreisfrequenz: } \omega = 2\pi\nu = \frac{E}{\hbar} = \frac{mc^2}{\hbar} \text{ mit } \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

## Definition Wellenfunktion

Eine Wellenfunktion sollte

- *single-valued* sein, d.h. jeder Wert aus der Definitionsmenge wird auf *genau* einen Wert in der Bildmenge abgebildet
- *square-integrable* sein, d.h.  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty$ ,
- *stetig* sein
- *differenzierbar* sein (nicht aber stetig-differenzierbar)

## Bornsches Postulat

Nach Bornschem Postulat muss die Wellenfunktion normierbar sein, d.h. folgende Bedingung muss erfüllt sein

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) = 0$$

## Operatoren

### Hermiteischer Operator

$$A^T = \bar{A} \text{ (kompl. konj.)} \iff A \text{ ist hermitesch}$$

Für einen hermiteschen Operator  $\hat{A}$  gilt

$$\langle \varphi | \hat{A} \Psi \rangle = \langle \hat{A} \varphi | \Psi \rangle$$

**Eigenwerte** Die Eigenwerte hermitescher Operatoren sind immer reell

## Matrixdarstellung

$$A_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^* \hat{A} \Psi_m dx = \langle n | \hat{A} | m \rangle$$

$\Psi_n, \Psi_m$  sind Eigenfunktionen, welche einen Hilbertraum aufspannen. Diese Funktionen sind orthogonal und daher ist  $A$  eine Diagonalmatrix mit ihren Eigenwerten als Diagonalelemente

## Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Pauli-Matrizen sind hermitesch.

## Kommutator

$$[A, B] \stackrel{\text{Def.}}{=} AB - BA$$

### Kommutierende Operatoren

$[A, B] = 0 \implies$  Die Operatoren  $A, B$  kommutieren

Wenn  $A, B$  kommutieren, dann bedeutet dies, dass  $A$  und  $B$  dieselben Eigenfunktionen haben. Zusätzlich ist  $B$  eine Diagonalmatrix im Vektorraum welcher von den Eigenfunktionen von  $A$  aufgespannt wird.

Weiter gilt, dass beide Größen  $A, B$  *gleichzeitig* bestimmt werden können wenn sie kommutieren.

## Kommutator berechnen

Wende Kommutator auf eine Testfunktion  $\Psi$  an:

$$[\hat{A}, \hat{B}]\Psi = \hat{A}\hat{B}\Psi - \hat{B}\hat{A}\Psi = \mu\Psi \implies [\hat{A}, \hat{B}] = \mu$$

## Zeitabhängige Schrödingergl.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \hat{H}\Psi(x, t)$$

## Ansatz um zeitun. Schrö. zu finden

Verwende Separationsansatz  $\Psi(\vec{x}, t) = T(t)P(\vec{x})$ , setze in zeitabh. Schrödingergleichung ein und erhalte zeitunabh. Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} T(t) = \frac{(\dots)}{P(\vec{x})} = ET(t)$$

$$\implies \frac{(\dots)}{P(\vec{x})} = E \text{ (zeitun. Schrödingergl.)}$$

## Zeitunabhängige Schrödingergl.

$$\hat{H}\Psi_n(x) = E_n\Psi_n(x)$$

## Eigenwerte und Eigenfunktionen

$\hat{A}$  ist eine Matrix  $\implies$  Eigenwerte und Eigenfunktionen (Eigenvektoren) wie üblich berechnen

$\hat{A}$  ist ein Operator  $\implies$  Wende Operator auf  $\Psi$  an und erhalte Eigenwerte  $k$ :

$$\hat{A}\Psi = k\Psi$$

## Wichtige Operatoren

Ortsoperator  $\hat{x} = x$

Impulsoperator  $\hat{p} = -i\hbar\nabla \stackrel{1D}{=} \hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

Paritätsoperator  $\hat{P}\Psi(x) = \Psi(-x)$  hermitesch

## Coulomb-Potential

$$\frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$q$ : Ladung Teilchen 1

$Q$ : Ladung Teilchen 2

$r$ : Abstand zwischen den beiden Teilchen

## Korrespondenzprinzip

- Definiere klassische Energie des Systems anhand der Ortskoordinaten  $x_i$  und der Impulskoordinaten  $p_i$
- Ersetze  $x_i$  und  $p_i$  durch die Operatoren  $\hat{x}_i = x_i$  und  $\hat{p}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$
- Stelle die Schrödingergleichung  $\hat{H}\Psi = E\Psi$  auf

## Wichtige Hamiltonoperatoren

### Freies Teilchen (1D)

Hamiltonoperator:

$$\hat{H}(\hat{x}) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

### Teilchen im Kasten (1D)

Hamiltonoperator: (Teilchen befindet sich in einem eindimensionalen Kasten der Länge  $L$ )

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

$$\text{mit } V(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } 0 < x < L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Randbedingungen :  $\Psi(x) = 0$  für  $x < 0$  und  $x > L$

Eigenfunktion:

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{wenn } 0 < x < L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eigenwerte:

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2} = \frac{\hbar^2 n^2}{8mL^2}$$

### Teilchen mit Potentialwand $V_0 \rightarrow \infty$ (1D)

Potential  $V(x)$ :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ (Bereich A)} \\ \infty & x \geq 0 \text{ (Bereich B)} \end{cases}$$

## Wellenfunktionen in den einzelnen Bereichen:

$$\Psi_A(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

## Randbedingungen:

$$\Psi_A(0) = 0 \implies B = -A$$

Die ursprüngliche Welle  $\Psi_A$  wird nun in zwei Wellen aufgeteilt:

- von links einlaufende Welle  $\Psi_{A, \text{links}}(x) = Ae^{ikx}$
- von rechts reflektierte Welle  $\Psi_{A, \text{rechts}}(x) = -Ae^{-ikx}$

## Reflexionskoeffizienten

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2$$

## Teilchen mit Potentialstufe $V_0 < \infty$ (1D)

### Potential $V(x)$ :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ (Bereich A)} \\ V_0 & x > 0 \text{ (Bereich B)} \end{cases}$$

### Hamiltonoperator:

$$\hat{H}_{x < 0} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\hat{H}_{x > 0} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0$$

### Fall 1: Energie $E > V_0$

$$\Psi_{x < 0}(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar$$

$$\Psi_{x > 0}(x) = A'e^{ik'x} + B'e^{-ik'x} \quad k' = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$$

Von links einfallende Welle wird mit der Amplitude  $B$  reflektiert. Dringt der andere Teil der Welle in den Bereich  $x > 0$  ein, so wird die Welle nicht mehr reflektiert  $\implies B' = 0$

## Randbedingungen

$$\Psi_A(0) = \Psi_B(0)$$

$$\frac{d}{dx}\Psi_A(0) = \frac{d}{dx}\Psi_B(0)$$

### Fall 2: Energie $E < V_0$

$$\Psi_{x < 0}(x) = Ae^{irx} + Be^{-irx} \quad r = \sqrt{2mE}/\hbar$$

$$\Psi_{x > 0}(x) = A'e^{r'x} + B'e^{-r'x} \quad r' = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$$

Im Bereich  $x > 0$  wächst der erste Term für  $x \rightarrow \infty$  nach  $\infty \implies A' = 0$

## Teilchen im Kasten (2D)

### Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + V(x, y)$$

$$\text{mit } V(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } 0 \leq x \leq L_x \\ & \text{und } 0 \leq y \leq L_y \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

### Eigenfunktion

$$\Psi_{n_x, n_y}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right)$$

**Eigenwerte (Achtung:** Im Folgenden wird das Plancksche Wirkungsquantum  $h$  und **nicht** das reduzierte PW  $\hbar$  verwendet)

$$E_{n_x, n_y} = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right)$$

Für einen quadratischen Kasten mit  $L = L_x = L_y$  gilt:

$$E_{n_x, n_y} = \frac{h^2}{8mL^2} (n_x^2 + n_y^2)$$

## Teilchen im Kasten (3D)

$$V(r) = 0$$

### Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r)$$

### Eigenfunktion:

$$\Psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{L_x L_y L_z}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right)$$

### Eigenwerte:

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right) + U_0$$

## Ebene Welle

Die ebene Welle ist ein Teilchen im Kasten der unendlich gross ist und ein konstantes Potenzial hat.

Da der Kasten unendlich gross ist, fällt der Reflexions-term weg.

Des Weiteren ist eine Normierung nicht einfach möglich und auch wird der Faktor in der Exponentialfunktion irgendwie gewählt (Abhängig von Periode der angenommenen Randbedingungen):

### 1D- ebene Welle ohne L

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \text{ mit } V(x) = V_0$$

$$\Psi_n(x) = e^{ik_n x} \text{ wobei } k_n \in \mathbb{N}_0$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} + V(x) \text{ (Potenzial Konstant)}$$

### Lösungsansatz mit Periodischen Randbedingungen

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \text{ mit } V(x) = V_0$$

$$\Psi_n(x) = e^{ik_n x} \text{ wobei } k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} + V(x) \text{ (Potenzial Konstant)}$$

### In anderer Notation (Zeitabhängig)

$$\Psi(x, t) = A_0 \sin\left(2\pi f \left(\frac{x}{c} - t\right) + \varphi\right)$$

## Tunneleffekt

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ V & , 0 \leq x \leq D \\ 0 & , x > D \end{cases} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

### Eigenfunktionen:

$$\Psi_A(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$\Psi_B(x) = A' e^{ik'x} + B' e^{-ik'x}$$

$$\Psi_C(x) = A'' e^{ikx} + B'' e^{-ikx}$$

$$\text{mit } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad k' = \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}} = i\kappa$$

### Fall 1: $D \rightarrow \infty$ (Potentialstufe)

Da  $\Psi_B$  nicht unendlich werden darf, bleibt  $\Psi_B(x) = A' e^{-\kappa x}$ . Damit folgt für die Wahrscheinlichkeit das Teilchen bei  $x > 0$  vorzufinden  $\int \Psi_B^*(x) \Psi_B(x) dx = A'^2 e^{-2\kappa x} dx$  (nimmt exponentiell ab!)

### Fall 2: $D < \infty$ (Potentialbarriere)

### Randbedingungen:

$$\Psi_A(0) \stackrel{!}{=} \Psi_B(0) \quad \Psi_B(D) \stackrel{!}{=} \Psi_C(D)$$

$$\frac{d}{dx} \Psi_A(0) \stackrel{!}{=} \frac{d}{dx} \Psi_B(0) \quad \frac{d}{dx} \Psi_B(D) \stackrel{!}{=} \frac{d}{dx} \Psi_C(D)$$

Da rechts der Barriere nichts reflektiert wird  $\Rightarrow B'' = 0$   
Es bleiben also 2 Unbekannte  $\Rightarrow$  Drücke  $A$  als Funktion von  $A''$

### Tunnelwahrscheinlichkeit bzw. Transmissionskoeffizient

$$P_T = \frac{|A''|^2}{|A|^2}$$

$$\text{Reflexionskoeffizient } R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

## H-Atom

**Hamiltonoperator:** (H-Atom besitzt nur ein Elektron)

$$\hat{H} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m_H} \Delta_H}_{\text{Kin. En. Wasserstoff Nukleus}} - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_e}_{\text{Kin. En. Elektron}} - \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}_H - \mathbf{x}_e|}}_{\text{Coulomb-Pot. zwischen Nukl. und El.}}$$

## Li<sup>+</sup>-Ion

**Hamiltonoperator:** (Li besitzt 3 Elektronen. Da Li<sup>+</sup>-Ion (Kation) sind es nur noch 2)

### Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m_H} \Delta_H}_{\text{Kin. En. Nukleus}} - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m_e} (\Delta_{e_1} + \Delta_{e_2})}_{\text{Kin. En. beider Elektronen}} - \underbrace{\frac{3e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{|\mathbf{x}_{\text{Li}} - \mathbf{x}_{e_i}|}}_{\text{Coulomb-Pot. zw. Nukl. und El.}} + \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}_{e_1} - \mathbf{x}_{e_2}|}}_{\text{Coulomb-Pot. zw. den El.}}$$

## Allgemeine Formel für ein Atom A

**Hamiltonoperator (Atom A, Ordnungszahl Z):**

$$\hat{H} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m_A} \Delta_A}_{\text{Kin. En. Nukleus}} - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m_e} \sum_{\substack{e_i \in \\ \text{Elektronen}}} \Delta_{e_i}}_{\text{Kin. En. aller Elektronen}} - \underbrace{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{e_i \in \\ \text{Elektronen}}} \frac{1}{|\mathbf{x}_{Li} - \mathbf{x}_{e_i}|}}_{\text{Coulomb-Pot. zw. Nukl. und allen El.}} + \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{(\text{Anz. El}-1)} \sum_{j>i}^{\text{Anz. El.}} \frac{1}{|\mathbf{x}_{e_i} - \mathbf{x}_{e_j}|}}_{\text{Coulomb-Pot. zw. allen El.}}$$

## Allgemeine Formel für ein Molekül

**Hamiltonoperator:**

$$\hat{H} = - \sum_{\substack{N_i \in \\ \text{Nuklei}}} \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m_{N_i}} \Delta_{N_i}}_{\text{Kin. En. aller Nuklei}} - \sum_{\substack{e_i \in \\ \text{Elektronen}}} \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_{e_i}}_{\text{Kin. En. aller Elektronen}} - \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{N_i \in \\ \text{Nuklei}}} \sum_{\substack{e_j \in \\ \text{Elektronen}}} \frac{Z_{N_i}}{|\mathbf{x}_{N_i} - \mathbf{x}_{e_j}|}}_{\text{Coulomb-Pot. zw. allen Nuklei und El.}} + \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{(\text{Anz. El}-1)} \sum_{j>i}^{\text{Anz. El.}} \frac{1}{|\mathbf{x}_{e_i} - \mathbf{x}_{e_j}|}}_{\text{Coulomb-Pot. zw. allen Elektronen}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{(\text{Anz. Nukl.}-1)} \sum_{j>i}^{\text{Anz. Nukl.}} \frac{Z_{N_i} \cdot Z_{N_j}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}_{N_i} - \mathbf{x}_{N_j}|}}_{\text{Coulomb-Pot. zw. allen Nuklei}}$$

## Harmonischer Oszillator (1D)

**Hamiltonoperator:**

$$\hat{H} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2 x^2 \right)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{mk}{\hbar^2}} = \frac{2\pi\nu m}{\hbar} = \frac{\omega m}{\hbar}, \quad \nu = \nu_{\text{osz}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**Eigenfunktion:**

$$\Psi_\nu(x) = (\alpha/\pi)^{1/4} (2^\nu \nu!)^{-1/2} H_\nu(\sqrt{\alpha}x) e^{-\alpha x^2/2}$$

mit  $H_\nu(\psi)$  (Hermite-Polynome)

**Eigenwert:**

$$E_n = h\nu \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

$$n = 0, 1, \dots \text{ (Vibrationsquantenzahl)} \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

## Harmonischer Oszillator (ND)

**Hamiltonoperator:**

$$\hat{H} = \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{r}^2 \right) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}_i^2 \right)$$

**Eigenwerte:**

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{N}{2} \right)$$

**Entartung:**

$$g_n = \binom{N+n-1}{n}$$

## Teilchen auf dem Ring

**Hamiltonoperator** : (Teilchen befindet sich auf dem Ring  $x^2 + y^2 = R^2$ )

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} + V(r)$$

$$\text{mit } V(r) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } r = R \\ \infty & \text{wenn } r \neq R \end{cases}$$

**Eigenfunktion:**

$$\Psi_n(\varphi) = A \exp\{in\varphi\}$$

**Randbedingung für  $\Psi_n$**

$$\Psi_n(\varphi) = \Psi_n(\varphi + 2\pi) \\ \implies n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Eigenwerte:**

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2}$$

Jeder Eigenwert ist zweifach entartet, da sich das Teilchen entweder nach links oder nach rechts dreht

## Totale Energie im Zustand $r$

$$E^r_{\text{total}} = \sum_{i=1}^k \chi_i \cdot E_i$$

$E^r_{\text{total}}$  : Totale Energie im Zustand  $r$

$r$  kann bspw. der Grundzustand ( $r = r_{\text{ground}} = 0, 1$ , je nach Wellenfunktion  $\Psi$ ) oder der erste angeregte Zustand ( $r = \text{exc} > r_{\text{ground}}$ ) sein (Bem.: ein angeregter Zustand bedeutet, dass er grösser als der Grundzustand ist)

$E_i$ : Energiezustand  $i$

$\chi_i$ : Anzahl Spins im Energiezustand  $i$

$k$ : Index des höchsten Energiezustands, in welchem sich der letzte Spin befindet

## Anregungsenergie ("excitation energy")

$$E^{\text{exc}} = E^{\text{exc}}_{\text{total}} - E^{\text{ground}}_{\text{total}}$$

## Dichtefunktion

(Born'sche Interpretation der Wellenfunktion) Die Dichtefunktion eines Elektrons das sich in den tiefsten drei Eigenzuständen befindet ist gegeben durch

$$p(x, y, z) = |\Psi_{1,2,3}|^2$$

Dabei beschreibt  $p$  die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen im infinitesimalen Volumen  $dV = dx dy dz$  vorzufinden.

## Erwartungswert

Der Erwartungswert des Operators  $\hat{A}$  im Zustand  $\Psi$  ist definiert als

$$\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \langle \hat{A} \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{A} \Psi dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi dx}$$

Ist  $\Psi$  normiert, so gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi dx = 1$

## Summenform

Sei  $\psi = \sum_n c_n \varphi_n$  ein normierter Zustand; dann gilt für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi d\tau \\ &= \sum_n \sum_m c_n^* c_m \langle \varphi_n | \hat{A} | \varphi_m \rangle \end{aligned}$$

## Superposition

Der Erwartungswert eines Zustands, welcher als Superposition zweier Zustände gegeben ist kann direkt durch die Wahrscheinlichkeitsamplituden berechnet werden:

$$\begin{aligned} \Psi &= c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 \\ \implies \langle \hat{A} \rangle_{\Psi} &= |c_1|^2 \langle \hat{A} \rangle_{\Psi_1} + |c_2|^2 \langle \hat{A} \rangle_{\Psi_2} \end{aligned}$$

## Erwartungswert (radial)

$$\langle \Psi_n | \hat{A} | \Psi_n \rangle = \langle A \rangle = \int_0^{\infty} \Psi_n^* A \Psi_n r^2 dr$$

## Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

mit

$$\Delta x \stackrel{\text{Def.}}{=} \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}$$

$$\Delta p_x \stackrel{\text{Def.}}{=} \sqrt{\langle \hat{p}_x^2 \rangle - \langle \hat{p}_x \rangle^2}$$

## Variationsprinzip

Für eine normalisierte Wellenfunktion  $\Psi$  gilt, dass der Erwartungswert bezüglich dem Hamiltonoperator  $\hat{H}$  immer grösser oder gleich der Grundzustandsenergie ist:

$$\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle \geq E_{\text{ground}}$$

## Bedingung an Versuchswellenfunktion $\Psi$ :

$$\Psi(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty$$

Entspricht der Erwartungswert der Grundzustandsenergie, so handelt es sich bei  $\Psi$  um die Grundzustandswellenfunktion.

Falls  $\Psi$  nicht normiert ist benutzt man folgende Gleichung:

$$\frac{\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \geq E_{\text{ground}}$$

Die Wellenfunktion  $\Psi$  wird von einem Parameter  $b$  abhängen. Das Minimum von  $\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$  findet man mit

$$\frac{d}{db} \frac{\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \stackrel{!}{=} 0$$

Setzt man nun das neu gefundene  $b$  wieder in  $\frac{\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}$  ein, so erhält man den gesuchten minimalen Wert, welcher im optimalen Fall genau der Grundzustandsenergie  $E_{\text{ground}}$  entspricht.

## Zeitentwicklung Erwartungswert

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle$$

## Erhaltungsgrösse

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = 0 \implies \hat{A} \text{ ist eine Erhaltungsgrösse}$$

## Zeitentwicklung des Impulsoperator $\hat{p}_x$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p}_x \rangle = - \left\langle \frac{dV(x)}{dx} \right\rangle$$

## Entartung

Wenn  $k$  Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung genau denselben Eigenwert besitzen, dann spricht man von einer  $k$ -fachen Entartung des betroffenen Zustands.

## Satz über entartete Zustände

Sind  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  Eigenfunktionen des Hamilton-Operators  $\hat{H}$  zum selben Eigenwert  $E = E_1 = E_2$ , dann ist eine beliebige Linearkombination

$$\Psi = c_1 \Psi_1 \pm c_2 \Psi_2$$

auch eine Eigenfunktion von  $\hat{H}$  zum selben Eigenwert  $E$

## Entartung bei Wasserstoffatom

Sei  $n$  die Hauptquantenzahl. Die Entartung beträgt  $n^2$ .

## Allgemeiner Drehimpuls $\vec{J}$

### Eigenwertgleichungen

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \Psi_{JM} &= \hbar^2 J(J+1) \Psi_{JM} & J &= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ \vec{J}_z \Psi_{JM} &= \hbar M \Psi_{JM} & M &= -J, -J+1, \dots, J \end{aligned}$$

### Drehimpuls-Leiteroperatoren

$$\begin{aligned} \vec{J}_+ &= \vec{J}_x + i\vec{J}_y & \vec{J}_- &= \vec{J}_x - i\vec{J}_y \\ \implies \vec{J}_x &= \frac{\vec{J}_+ + \vec{J}_-}{2} & \vec{J}_y &= \frac{\vec{J}_+ - \vec{J}_-}{2i} \end{aligned}$$

## Matrixdarstellung Drehimpulsoperatoren

- Wähle als **Basis** die Eigenfunktionen  $\Psi_{J,M}$  von  $\vec{J}^2$  und  $\vec{J}_z$  in **Dirac'scher Notation**  $|J, M\rangle$
- Beachte, dass die Eigenfunktionen **orthonormiert** sind:  $\langle J, M | J', M' \rangle = \delta_{J,J'} \delta_{M,M'}$ . Hier

Stehen  $J, M, J', M'$  für konkrete Quantenzahlen zweier Eigenfunktionen.

**Beispiel:** für  $J = \frac{1}{2}$ , kann  $M$  nur die Werte  $M = \pm \frac{1}{2}$  annehmen. Wir wählen also die Basisfunktionen

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |\alpha\rangle \quad \text{und} \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |\beta\rangle$$

- Die Eigenwertgleichungen des allgemeinen Drehimpulses ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned} \hat{J}_z \Psi_{JM} &= \hat{J}_z |J, M\rangle = \hbar M |J, M\rangle \\ \hat{J}^2 \Psi_{JM} &= \hat{J}^2 |J, M\rangle = \hbar^2 J(J+1) |J, M\rangle \end{aligned}$$

- **Matrixelemente von  $\hat{J}^2$  und  $\hat{J}_x$  s.O.**

$$\begin{aligned} \langle J', M' | \hat{J}_z | J, M \rangle &= \hbar M \langle J', M' | J, M \rangle = \hbar M \delta_{J,J'} \delta_{M,M'} \\ \langle J', M' | \hat{J}^2 | J, M \rangle &= \hbar^2 J(J+1) \delta_{J,J'} \delta_{M,M'} \end{aligned}$$

- **Matrixelemente von  $\hat{J}_+$ ,  $\hat{J}_-$  berechnen:**

$$\begin{aligned} \langle J', M' | \hat{J}_+ | J, M \rangle &= \hbar \sqrt{J(J+1) - M(M+1)} \delta_{J,J'} \delta_{M',M+1} \\ \langle J', M' | \hat{J}_- | J, M \rangle &= \hbar \sqrt{J(J+1) - M(M-1)} \delta_{J,J'} \delta_{M',M-1} \end{aligned}$$

- $\hat{J}_x, \hat{J}_y$  aus  $\hat{J}_+, \hat{J}_-$  bestimmen.

## Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\vec{J}_x, \vec{J}_y] &= -i\hbar \vec{J}_z & [\vec{J}_y, \vec{J}_z] &= -i\hbar \vec{J}_x \\ [\vec{J}_z, \vec{J}_x] &= -i\hbar \vec{J}_y \end{aligned}$$

# Spin-Drehimpuls $\vec{S}$

## Spin $\frac{1}{2}$

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alle Operatoren haben die Eigenwerte  $\pm \frac{\hbar}{2}$ .

## Eigenvektoren

	$+\frac{\hbar}{2}$	$-\frac{\hbar}{2}$
$\hat{S}_x$ :	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$
$\hat{S}_y$ :	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)^T$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)^T$
$\hat{S}_z$ :	$(1, 0)^T$	$(0, 1)^T$

## Spin 1

$$J_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## Spin $\frac{3}{2}$

$$J_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

## Allgemein: Spin $s$ Matrizen definieren

Für Spin  $s$  erhalten wir eine  $(2s+1) \times (2s+1)$  Matrix. Die erweiterten Paulimatrizen sind dann wie folgt definiert.

niert:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_z)_{jl} &= \frac{\langle s, j | S_z | s, l \rangle}{s\hbar} = \frac{j}{s} \delta_{jl} \\
 (\sigma_x)_{jl} &= \frac{\sqrt{s(s+1) - j(j-1)} \delta_{j,l+1}}{2s} \\
 &\quad + \frac{\sqrt{s(s+1) - j(j+1)} \delta_{j,l-1}}{2s} \\
 (\sigma_y)_{jl} &= \frac{\sqrt{s(s+1) - j(j-1)} \delta_{j,l+1}}{2is} \\
 &\quad - \frac{\sqrt{s(s+1) - j(j+1)} \delta_{j,l-1}}{2is}
 \end{aligned}$$

Wobei  $j, l \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$

Die Spin- $s$ -Matrizen erhält man durch multiplizieren der Paulimatrizen mit  $\hbar \cdot s$ .

## Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x &= i\hbar \hat{S}_z \\
 \hat{S}_y \hat{S}_z - \hat{S}_z \hat{S}_y &= i\hbar \hat{S}_x \\
 \hat{S}_z \hat{S}_x - \hat{S}_x \hat{S}_z &= i\hbar \hat{S}_y
 \end{aligned}$$

## Kernspin $\vec{I}$

$$\hat{I}_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_x \quad \hat{I}_y = \frac{\hbar}{2} \sigma_y \quad \hat{I}_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z$$

## Bahndrehimpuls $\vec{l}$ und $\vec{l}^2$

$$\begin{aligned}
 \vec{l} &= (\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z) = \\
 &\left( i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right), i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right), \right. \\
 &\left. i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2$$

## Bahndrehimpuls in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
 \hat{l}_x &= i\hbar \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\
 \hat{l}_y &= i\hbar \left( -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\
 \hat{l}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \\
 \hat{l}^2 &= -\hbar^2 \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)
 \end{aligned}$$

## Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned}
 [\hat{l}_x, \hat{l}_y] &= i\hbar \hat{l}_z & [\hat{l}_y, \hat{l}_z] &= i\hbar \hat{l}_x & [\hat{l}_z, \hat{l}_x] &= i\hbar \hat{l}_y \\
 [\hat{l}^2, \hat{l}_x] &= [\hat{l}^2, \hat{l}_y] = [\hat{l}^2, \hat{l}_z] &= 0
 \end{aligned}$$

## Unschärfe des Bahndrehimpuls

Es ist unmöglich mehr als eine Komponente von  $l$  exakt zu bestimmen:

$$\Delta l_x \Delta l_y \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{l}_x, \hat{l}_y] \rangle \right| = \frac{1}{2} \left| \langle \hat{l}_z \rangle \right|$$

$l^2$  und  $l_i$  kommutieren hingegen und können daher gleichzeitig bestimmt werden

## Bahndrehimpuls und Kugelflächenfunkt.

$$\begin{aligned}
 Y_l^m &: [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \\
 \hat{l}_z Y_l^m(\theta, \varphi) &= \hbar m Y_l^m(\theta, \varphi) \\
 \hat{l}^2 Y_l^m(\theta, \varphi) &= \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi)
 \end{aligned}$$

## Drehimpuls Allgemein

$\vec{I}$	Kernspin (ein Kernteilchen)
$\vec{s}$	Elektronenspin
$\vec{l}$	Bahndrehimpuls eines Elektrons
$\vec{s} + \vec{l} = \vec{j}$	Drehimpuls eines Elektrons
$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$	Gesamtdrehimpuls eines Atoms o. Moleküls
$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$	Gesamtdrehimpuls ohne Kernspin
$\vec{I} = \sum_i \vec{I}_i$	Gesamtdrehimpuls im Kern
$\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$	Gesamtdrehimpuls

## Relation ge- / ungekoppelte Basisfunkt.

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1, m_2} c(j_1, m_1, j_2, m_2, J, M) |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

wobei  $c(j_1, m_1, j_2, m_2, J, M)$  der Clebsch-Gordan Koeffizient ist.

## Magnetische Quantenzahlen

für die magnetische Quantenzahl  $m_l$  gilt:

$m_l \in \{-l, \dots, -1, 0, 1, \dots, l\}$  wobei  $l$  die Nebenquantenzahl ist, also die Form des Orbitals angibt:

$$\begin{array}{l|l} s \text{ Schale } & l = 0 \\ p \text{ Schale } & l = 1 \\ d \text{ Schale } & l = 2 \\ f \text{ Schale } & l = 3 \\ g \text{ Schale } & l = 4 \end{array}$$

Die Hauptquantenzahl  $n$  gibt die Schale an. Beispiel:  
 $n = 2 \implies l = 0, 1$

## Beispiel: Quantenzahl finden

$$(1s)^2(2s)^2(2p)^5$$

Da wir hier nur nichtvolle Schalen betrachten müssen wird nur das Elektron in der  $2p$  Schale angeschaut:

$$l = 1 \implies L = 1$$

$$s = \pm 1/2 \implies S = \pm 1/2$$

$$\implies J_1 = 3/2, J_2 = 1/2$$

## Auffüllreihenfolge

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 6s^2 \dots$$

## Rotational Degeneracy

da  $E_J$  nicht von  $M$  abhängt und  $M \in \{-J, \dots, -1, 0, 1, \dots, J\}$  ist die Entartung  $g = 2J + 1$

## Kugelflächenfunktionen

$$L_z Y_0^0 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = 0 = 0 Y_0^0$$

$$L_z Y_1^1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi} \right) = -i\hbar i \left( -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi} \right) = \hbar Y_1^1$$

$$L_z Y_1^0 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta \right) = 0 = 0 Y_1^0$$

$$L_z Y_1^{-1} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{-i\varphi} \right) = -i\hbar (-i) \left( \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{-i\varphi} \right) = -\hbar Y_1^{-1}$$

$$L_z Y_2^2 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi} \right) = -i\hbar 2i \left( \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi} \right) = 2\hbar Y_2^2$$

$$L_z Y_2^1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi} \right) = -i\hbar i \left( -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi} \right) = \hbar Y_2^1$$

$$L_z Y_2^0 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \right) = 0 = 0 Y_2^0$$

$$L_z Y_2^{-1} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{-i\varphi} \right) = -i\hbar (-i) \left( \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{-i\varphi} \right) = -\hbar Y_2^{-1}$$

$$L_z Y_2^{-2} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{-2i\varphi} \right) = -i\hbar (-2i) \left( \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{-2i\varphi} \right) = -2\hbar Y_2^{-2}$$

## Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned} & \int Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) d\Omega \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} \end{aligned}$$

## Atomorbitalmodell

Aus der Schrödingergleichung

$$\hat{H}\Psi_{n,l,m} = E_n \Psi_{n,l,m}$$

folgt, dass jeder Energieeigenwert zur **Hauptquantenzahl**  $n$   $2l + 1$ -fach **Entartet** ist:

Schale	$n$	$l$	Orbitaltyp	$m$	$s$	Anzahl der Quantenzustände	
K	1	0	1s	0	$\pm 1/2$	2	2
L	2	0	2s	0	$\pm 1/2$	2	8
		1	2p	-1 0 +1	$\pm 1/2$	6	
M	3	0	3s	0	$\pm 1/2$	2	18
		1	3p	-1 0 +1	$\pm 1/2$	6	
		2	3d	-2 -1 0 +1 +2	$\pm 1/2$	10	
N	4	0	4s	0	$\pm 1/2$	2	32
		1	4p	-1 0 +1	$\pm 1/2$	6	
		2	4d	-2 -1 0 +1 +2	$\pm 1/2$	10	
		3	4f	-3 -2 -1 0 +1 +2 +3	$\pm 1/2$	14	

## Statistische Physik

### Thermischer Mittelwert

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\sum_n (\Psi_n, \hat{A} \Psi_n) w_n}{\sum_n w_n} = \frac{\sum_n E_n \omega_n}{\sum_n \omega_n}$$

$$\text{mit } w_n = \frac{\Omega_n e^{-E_n/(k_B T)}}{\sum_k \Omega_k e^{-E_k/(k_B T)}}$$

und  $\Omega_n$  geom. Vielfachheit des Eigenw.  $E_n$

## Klassisches System

$$\langle f \rangle = \frac{\sum_n f_n \cdot w_n}{\sum_n w_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\int f(p, q) dw(p, q)}{\int dw(p, q)}$$

$$\text{mit } dw(\vec{q}, \vec{p}) = e^{-\frac{H(\vec{q}, \vec{p})}{k_B T}} \rho(\vec{q}, \vec{p}) d^N \vec{q} d^N \vec{p}$$

$$\text{und } \rho(\vec{q}, \vec{p}) = \left( \frac{1}{h} \right)^{3N} \frac{1}{N!}$$

## Zeitlicher Mittelwert

$$\bar{x} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) dt$$

## Gauss-Verteilung

$$dW(x) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \cdot e^{-\beta(x-x_0)^2/2} dx$$

## Maxwell-Boltzmann-Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Teilchen im Zustand  $(\vec{p}, \vec{q})$  befindet ist

$$d\omega(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{e^{-\frac{H_0(\vec{p}, \vec{q})}{k_B T}}}{\int d\tau e^{-\frac{H_0(\vec{p}, \vec{q})}{k_B T}}} d\tau$$

wobei  $d\tau$  die **Messgröße** ist mittels  $d\tau = \frac{d^3q d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$  und

$$\frac{dN}{N} = d\omega(\vec{p}, \vec{q})$$

mit  $dN$ : Anz. Teilchen im  $d\tau$  und  $N$ : gesamte Anz. Teilchen

## Maxwell'sche Geschw. Verteil.

Die Maxwellverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Geschwindigkeitsbetrag eines freien Atoms in einem freien Gas zur Temperatur  $T$  zwischen  $v$  und  $v + dv$  liegt.

## Freies Gas 1D

$$\frac{dW(v)}{dv} = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

## Freies Gas 3D

$$dW(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 dv$$

## Beispiel: Geschw. Verteil. in 3D

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v dv}{\int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

## Entropie

Die Entropie des Systems ist gegeben als:

$$\begin{aligned} S(T, V, N) &= k_B \frac{\partial}{\partial T} (T \ln(Z(T, V, N))) \\ &= -k_B \ln(N!) + k_B N \ln(Z(T, V, 1)) \\ &\quad + k_B T N \frac{\partial}{\partial T} \ln(Z(T, V, 1)) \end{aligned}$$

$$N! \stackrel{N \gg 1}{\approx} N^N e^{-N} \Rightarrow N k_B \ln \left( \left( \frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{V}{N} \right) + N \frac{3}{2} k_B$$

## Beispiel: Mischvorgang Zweikammersystem

Zwei getrennte Kammern mit gleicher Dichte  $\left(\frac{N_1}{V_1} = \frac{N_2}{V_2}\right)$  und gleicher Temperatur werden gemischt.

Es gilt  $V = V_1 + V_2$  und  $N = N_1 + N_2$

- unterschiedl. Gases:

$$\Delta = S(T, N_1, V) + S(T, N_2, V) - S(T, N_1, V_1) - S(T, N_2, V_2) > 0$$

bei untersch. Gasen ändert sich die Dichte nach dem Mischvorgang!

- gleiche Gases:

$$\Delta = S(T, N, V) - S(T, N_1, V_1) - S(T, N_2, V_2) = 0$$

## Spezifische Wärme

$$C_V = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$$

pro Teilchen: teile durch  $N$   
pro Masse: Teile durch  $m$

## Thermisches Gleichgewicht

Im thermischen Gleichgewicht bei einer Temperatur  $T$  hat jeder Freiheitsgrad im Mittel die gleiche Energie:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

## Mehrere Freiheitsgrade

Für Teilchen mit  $k$  Freiheitsgraden gilt:

$$\langle E \rangle = \frac{k}{2} k_B T$$

## Freiheitsgrade

Der Freiheitsgrad wird bestimmt durch die Anzahl aller Variablen, welche quadratisch in den Hamiltonian eingehen.

**Beispiel:** Energie des Gases:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

⇒ 3 Freiheitsgr. je Atom kommen als Quadrat vor

## Mittlere Energie eines Gases

Ein Gas wird aus vielen **harmonischen Oszillatoren** modelliert. Dabei lautet der Hamiltonian eines harmonischen Oszillators

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\vec{q}^2$$

## Mittlere Energie pro Teilchen und Freiheit

**Ohne potentieller Energie:**

$$\frac{1}{2}k_B T$$

**Mit potentieller Energie:**

$$lk_B T$$

## N harmonische Oszillatoren

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\vec{q}_i^2$$

## Ideales Gas im Schwerfeld

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + mgz_i$$

## Beispiel: Ideales Gas im Schwerfeld

**Hamiltonian:** 
$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + mgz_i \right)$$

**Mittlere kinetische Energie:** 
$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

**Mittlere Höhe der Teilchen:** 
$$\langle z \rangle = \frac{k_B T}{mg}$$

**Mittlere Potentielle Energie:** 
$$\langle E_{pot} \rangle = k_B T$$

## Zustandssumme

$$\begin{aligned} Z(T, V, N) &= \frac{1}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} \int d^{3N}q d^{3N}p e^{-H(\vec{q}, \vec{p})/(k_B T)} \\ &= \frac{1}{N!} \left( \int \frac{d^3q d^3p}{(2\pi\hbar)^3} e^{-H_0(\vec{q}, \vec{p})/(k_B T)} \right)^N \end{aligned}$$

## Zustandssumme für unabh. Teilchen

Die Zustandssumme für N unabhängige Teilchen lautet:

$$Z(T, V, N) = Z(T, V, N = 1)^N \cdot \frac{1}{N!}$$

## Zustandssumme für ideales Gas (1 Teilchen)

$$Z(T, V, N = 1) = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} dp$$

## Freie Energie

$$F(T, V, N) = -k_B T \ln(Z(T, V, N)) \ln(N!) \approx N \cdot \ln(N)$$

## Freie En. ideales Gas mit N Teilchen

$$H([\vec{p}], [\vec{q}]) = \sum_{i=1}^N H_0(\vec{p}_i, \vec{q}_i)$$

## Totale Energie

$$\langle E \rangle = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left[ \ln \sum_n \Omega_n e^{-E_n/k_B T} \right]$$

## Freie Energie ↔ Totale Energie

$$\langle E \rangle = F - T \frac{\partial F}{\partial T}$$

## Druck

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{Nk_B T}{V}$$

# Mathematik Appendix

## Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

## Bra-Ket Notation

$$\langle v | = (v_1^*, \dots, v_n^*) \quad |v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

## Skalarprodukt

1. Bilinearität:

(i)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(ii)  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

(iii)  $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$

2. Symmetrie:

(i)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

3. Positive Definitheit:

(i)  $\langle x, x \rangle \geq 0$

(ii)  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

## Eigenwerte und Eigenvektoren

1. Sei die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben

2. Nullstellen des folgenden charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte von  $A$ :

$$\det(A - \lambda I_n) \stackrel{!}{=} 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}, I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$I_n$  ist dabei die  $n \times n$ -Einheitsmatrix

3. Löse das folgende Gleichungssystem für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$ :

$$(A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$\vec{v}$  ist dabei der Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$

### Spezialfall: Diagonalmatrizen

**Eigenwerte:** Bei Diagonalmatrizen sind die Eigenwerte die Einträge in der Diagonale

**Eigenvektoren:** Eigenvektoren einer Diagonalmatrix sind die kanonischen Einheitsvektoren (für eine  $2 \times 2$ -Matrix wären dies  $v_1 = (1, 0)^T$  und  $v_2 = (0, 1)^T$ )

### Komplexes

Für  $z \in \mathbb{C}$  gilt:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

### Stirling'sche Approximation

$$\ln(N!) \approx N \cdot \ln(N)$$

## Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx.$$

## Integration durch Substitution

1. Aufstellen der Substitutionsgleichung

$$u = g(x) \implies \frac{du}{dx} = g'(x) \iff dx = \frac{du}{g'(x)}$$

**Wichtig:** Der Term  $g'(x)$  muss sich nach der Substitution wegekürzen, da sich ansonsten von  $x$  und  $u$  abhängige Terme im Integral befinden. Deshalb ist in vielen Fällen folgendes empfehlenswerter:

$$x = h(u) \quad \frac{dx}{du} = h'(u) \quad dx = h'(u) du$$

2. Durchführen der Substitution

$$\int f(x) dx = \int \varphi(u) du$$

Wenn man bei bestimmten Integralen die Grenzen mitsubstituiert entfällt die Rücksubstitution!

3. Berechnung des neuen Integrals

$$\int \varphi(u) du = \phi(u) \quad \phi'(u) = \varphi(u)$$

4. Rücksubstitution

$$\int f(x) dx = \int \varphi(u) du = \phi(u) = \phi(g(x)) = F(x)$$

## Integraltransformationen

### Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$dA = r dr d\varphi \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

### Kugelkoordinaten

$$x = r \cos \varphi \sin \theta \quad y = r \sin \varphi \sin \theta \quad z = r \cos \theta$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \theta \in [0, \pi]$$

### Zylinderkoordinaten

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z$$

$$dV = r dr d\varphi dz \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

## Integrale der Form $\int \dots$

$$\frac{\int_{\Omega} \frac{\sin(x-a)}{(x-a)} x dx}{\int_{\Omega} \frac{\sin(x-a)}{(x-a)} dx} = \frac{a \int_{\Omega} \frac{\sin(x-a)}{(x-a)} dx + \int_{\Omega} \frac{\sin(x-a)}{(x-a)} (x-a) dx}{\int_{\Omega} \frac{\sin(x-a)}{(x-a)} dx}$$

$$\text{Subst. } \underline{x'=x-a} \quad \frac{a \int_{\Omega} \frac{\sin(x-a)}{(x-a)} dx}{\int_{\Omega} \frac{\sin(x-a)}{(x-a)} dx} + \frac{\int_{\Omega} \frac{\sin(x')}{(x')} (x') dx}{\int_{\Omega} \frac{\sin(x')}{(x')} dx}$$

= a + 0 falls  $\Omega = [-c, c]$ , da  $\sin$  eine unger. Fun. ist

## Integral ungerader Funktionen

Sei  $f(x)$  eine ungerade Funktion ( $f(-x) = -f(x)$ )  
 $\implies \int_{-c}^c f(x) dx = 0$

## Komplex-konjugiertes Integral

$$\overline{\int_{\Omega} f(x) dx} = \int_{\Omega} \overline{f(\bar{x})} dx$$

## Wichtige Einheiten

$$1eV \quad 1.6 \cdot 10^{-19} J$$

$$1J \quad 0.625 \cdot 10^{19} eV$$

$$1fermi \quad 10^{-15} m$$

## Gaussintegrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{(a)^{3/2}}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx$$

$$= \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2i-1) \cdot \sqrt{\pi}}{2^{i+1} \cdot \alpha^{i+1/2}} & \text{falls } n = 2i \\ \frac{i!}{2 \cdot \alpha^{i+1}} & \text{falls } n = 2i + 1 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-bx^2} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-bx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2b^{3/2}}$$

## Hyperbolische Funktionen

### sinh

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

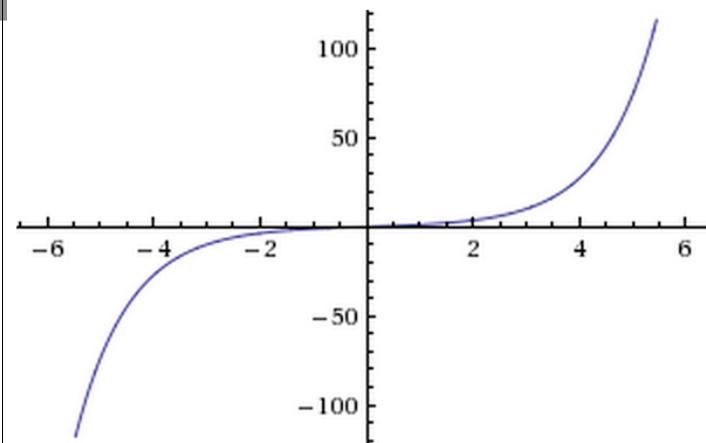
$$\sinh(z) = -\sinh(-z)$$

$$\sinh(z) = \sinh(z + 2\pi i)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sinh(z) = \cosh(z)$$

plot **sinh(x)**  $x = -2\pi$  to  $2\pi$

lot:



### cosh

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\cosh(z) = \cosh(-z)$$

$$\cosh(z) = \cosh(z + 2\pi i)$$

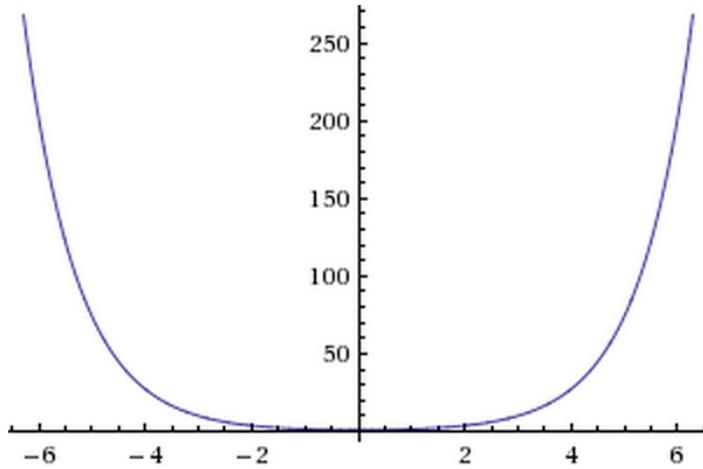
$$\frac{\partial}{\partial z} \cosh(z) = \sinh(z)$$

plot

cosh(x)

 $x = -2\pi$  to  $2\pi$ 

lot:



tanh

$$\tanh(z) = -1 + \frac{2}{1 + e^{-2z}}$$

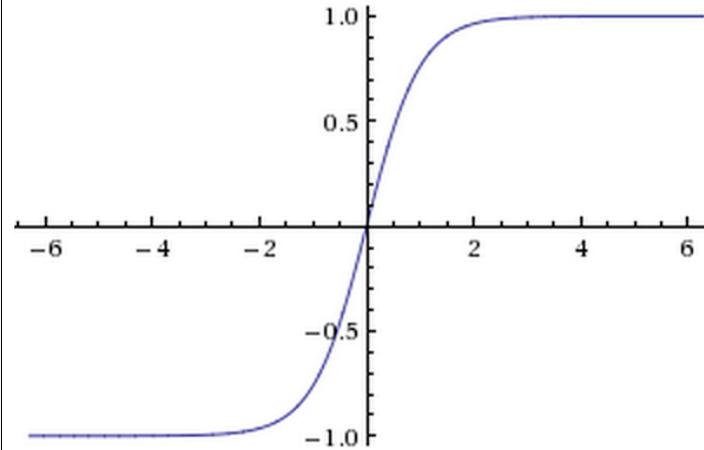
$$\frac{\partial}{\partial z} \tanh(z) = 1 - \tanh^2(z)$$

plot

tanh(x)

 $x = -2\pi$  to  $2\pi$ 

lot:



## Physik Appendix

### Elektrisches Feld $\leftrightarrow$ Kraft

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\vec{F}(\vec{x})}{q}$$

mit  $q$  Ladung und  $\vec{F}(\vec{x})$  Kraft

### Kraft $\leftrightarrow$ Potential

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla \vec{U}(\vec{x})$$

mit  $\vec{F}(\vec{x})$  Kraftfeld und  $\vec{U}(\vec{x})$  Potentialfeld