Physik 1 Zusammenfassung

Frühlingssemester 2012

Giuseppe Accaputo

Rechnergestützte Wissenschaften, B.Sc.

ETH Zürich

1 Kinematik

1.1 Einheiten

$\ddot{x}(t)$	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	Beschleunigung
$\dot{x}(t)$	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	Geschwindigkeit
$x(t)$	m	Position

1.2 Gleichmässig beschleunigte Bewegung

Beschleunigung

$$\ddot{x}(t) = a$$

Geschwindigkeit

$$\dot{x}(t) = a \cdot t + v_0$$

Position

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

1.3 Verschiedene Tipps

Zu welcher Zeit stoppt die Masse?

Die Masse stoppt genau dann, wenn $\dot{x}(t) = 0 \implies$ Löse Gleichung nach t auf.

Wann treffen zwei Punkte aufeinander?

$x_{m_1}(t) = x_{m_2}(t) \implies$ Löse Gleichung nach t auf.

Versichern, dass Zeit t positiv ist

Löst man eine Gleichung nach der Zeit t auf, und die rechte Seite der Gleichung enthält ein Term, der negativ sein könnte, dann muss der Betrag dieses Terms verwendet werden, da die Zeit nie negativ sein kann.

Frage nach einer Gleichgewichtslage

Wird nach einer Gleichgewichtslage gefragt, so berechnet sich diese indem man folgende Gleichung nach x auflöst:

$$F = -\nabla U(x) = 0$$

Bewegungsgleichung in einer kleinen Umgebung

Wird nach der Bewegungsgleichung in einer kleinen Umgebung gefragt, so muss die Taylorreihe der Kraft F um einen Punkt x_0 (z.B. Gleichgewichtslage) bis zum ersten Vorkommnis von x entwickelt werden (meistens reicht ein Taylorpolynom ersten Grades):

$$F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0) \cdot (x - x_0) + \mathcal{O}(x^2)$$

Auslenkung $(x - x_0)$ substituieren Nach der Entwicklung der Taylorreihe um einen Punkt $x_0 \neq 0$ bleiben Terme der Form $(x - x_0)$ übrig. In diesem Fall kann man die Substitution $u = (x - x_0)$ vornehmen:

$$m\ddot{x} = -D \cdot (x - x_0)$$
$$\overset{u=(x-x_0)}{\Longrightarrow} m\ddot{u} = -D \cdot u$$
$$\implies \text{Harmonischer Oszillator}$$

2 Dynamik

2.1 Einheiten

F	$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	Kraft
v	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	Kraft
m	kg	Masse
a	$\frac{m}{s^2}$	Beschleunigung
t	s	Zeit
E_t	$\mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$	Energie

2.2 Energetik

Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

Ebene Polarkoordinaten (r, ϕ)

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2\right)$$

Potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = mgh \text{ falls } g = \text{const.}$$

$g \neq \text{const.}$: Siehe potentielle Energie im Graviationsfeld
h: Höhe über frei gewähltem Bezugsniveau (Nulllage)

Totale (mechanische) Energie

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$

Maximum und Minimum der kinetischen und potentiellen Energie

E_{kin} ist dort am kleinsten, wo E_{pot} am grössten ist, und umgekehrt.

Energieerhaltungssatz

In einem abgeschlossenen System ohne Energieaustausch mit der Umgebung gilt zu jedem Zeiptunkt

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= \text{const.} \\ \implies E_{\text{kin(unten)}} &= E_{\text{pot(oben)}} \end{aligned}$$

Tipps zum Energieerhaltungssatz

Geschwindigkeit am Ort $x = 0$ berechnen Seien E_{pot}, v_0 und x_0 gegeben. Die Geschwindigkeit $\dot{x}$ am Punkt $x = 0$ lässt sich berechnen durch

$$E_{\text{pot}}(x_0) + E_{\text{kin}}(v_0) = E_{\text{kin}}(\dot{x})$$

Hierbei verwendet man die Tatsache, dass am Punkt $x = 0$ die potentielle Energie 0 ist ($E_{\text{pot}}(x = 0) = 0$).

Maximale Koordinate $x_{\max}$ berechnen Seien E_{pot}, v_0 und x_0 gegeben. Die maximale Koordinate $x_{\max}$ berechnet sich durch

$$E_{\text{pot}}(v_0) + E_{\text{kin}}(x_0) = E_{\text{pot}}(x_{\max})$$

Hierbei verwendet man die Tatsache, dass die maximale Koordinate an dem Punkt erreicht wird, an welchem die potentielle Energie maximal und die kinetische Energie daher 0 ist ($\dot{x}_{\max} = 0 \implies E_{\text{kin}}(\dot{x}_{\max} = 0) = 0$)

2.3 Gravitation

Gravitationskraft

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

G: Gravitationskonstante $= 6{,}673 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

Potentielle Energie im Gravitationsfeld

$$E_{\text{pot}} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$$

3 Wellen

3.1 Harmonische Wellen

$$f(x,t) = A\cos(qx + \eta t)$$

η: Dispersionsrelation $= c \cdot q$

q: Wellenzahl

c: Geschwindigkeit der Welle, abhängig von Medium (Seite, Luft etc.)

Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{q}$$

λ: Wellenlänge (Abstand zweier Wellentäler)

q: Wellenzahl (Zahl der Wellentäler pro Längeneinheit)

Frequenz

$$\nu = \frac{2\pi}{T}$$

ν: Frequenz

T: Periode

Geschwindigkeit der Welle

$$c = \nu \cdot \lambda$$

c: Geschwindigkeit der Welle

ν: Frequenz

λ: Wellenlänge

3.2 Stehende Wellen

Eine stehende Welle entsteht aus der Überlagerung zweier gegenläufig fortschreitender Wellen gleicher Frequenz und gleicher Amplitude.

$$\begin{aligned} f(x,t) &= A[\cos(\eta - qx) - \cos(\eta t + qx)] \\ &= 2A\sin(qx)\sin(\eta t) \end{aligned}$$

Zwingend zu erfüllende Randbedingung

$$f(x = 0, t) = 0 \quad \forall t$$

Bemerkung zu f Bei f handelt es sich nicht mehr um eine normal laufende Welle.

Frequenz

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda} = \frac{n \cdot c}{2 \cdot L}$$

n: Quantenzahl (Anzahl *Bäuche*)

4 Starrer Körper

4.1 Einheiten

$\vec{L}$	$\dfrac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{s}$	Drehimpuls
$\vec{p}$	$\text{N} \cdot \text{s}$	Impuls
ω	$\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$	Winkelgeschwindigkeit

4.2 Kreisbewegung

Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 &= \text{Kraft in radialer Richtung (Zentripetalkraft)} \\ 2m\dot{r}\dot{\varphi} + mr\ddot{\varphi} &= \text{Kraft in tangentialer Richtung} \end{aligned}$$

Beachte:

- Ist keine radiale oder tangentiale Beschleunig gegeben, so wirkt auch keine radiale oder tangentiale Kraft
- Ändert sich der Radius r ohne Angabe einer Kraft, so wirkt nur die Zentrifugalkraft und die Bewegungsgleichung in radialer Richtung lautet: $m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = 0 \iff m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2$
- Wirkt radial eine angegebene Kraft K, so lautet die Bewegungsgleichung in radialer Richtung: $m\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = K$
- Die obigen beiden Aussagen sind auch gültig, wenn man *radial* mit *tangential* und $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ mit $m2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\varphi}$ ersetzt

Beispiele für Kräfte in radialer Richtung

- Anziehungskraft der Erde (Masse m rotiert dabei um die Erdkugel): $F_{\text{r}} = -G\dfrac{M_{\text{Erde}} \cdot m}{r^2}$

- Federkraft: $F_\mathrm{r} = -k \cdot \underbrace{(r-l)}_{\text{Auslenkung}}$ mit l = Länge während Ruhelage

Vollständige Gleichung

$$\ddot{x} = \widehat{e}_r \cdot (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \widehat{e}_\varphi \cdot (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})$$

$$\widehat{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \text{(Einheitsvektor in radialer Richtung)}$$

$$\widehat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \text{(Einheitsvektor in tangentialer Richtung)}$$

Geschwindigkeit v bei konstantem Radius

$$r = \text{const.}\ (\dot{r} = 0) \implies v = \dot{\varphi} \cdot r$$

Zentripetalkraft (Radialkraft)

Auf Objekte in einem rotierenden Bezugssystem wirkt eine Zentripetalkraft, die senkrecht auf der Rotationsachse des Systems steht und nach *innen* zeigt. Durch diese Kraft wird eine Bewegung zur Kreisbewegung.

$$F_\mathrm{Zp} = m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2$$

Falls $r = \text{const.}$ ist, gilt $\omega = \frac{v}{r}$ und $a = r \cdot \omega^2$; es folgt:

$$F_\mathrm{Zp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Zentrifugalkraft

Die Zentrifugalkraft zeigt im Gegensatz zur Zentripetalkraft nach aussen. Sie ist eine Trägheitskraft, d.h. die Kraft wirkt nur dann auf einen Körper, falls man dessen Bewegung in einem beschleunigten Bezugssystem beobachtet.

Coulomb-Kraft (Kreisbewegung mit Ladungen)

Bei Kreisbewegungen mit Ladungen (z.B. Elektron rotiert um Proton) wirkt die Coulombkraft zusätzlich zur Zentrifugalkraft in radialer Richtung:

$$m\ddot{r} = mr\omega^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \stackrel{!}{=} 0$$

m : Masse der rotierenden Ladung

Lorentz-Kraft (Kreisbewegung mit Ladungen und magnetischem Feld)

Ist nebst der Kreisbewegung zweier Ladungen zusätzlich ein magnetisches Feld vorhanden, so wirkt die Lorentz-Kraft zusätzlich zur Zentrifugalkraft und Coulomb-Kraft in radialer Richtung:

$$m\ddot{r} = mr\omega^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} + q_1 \cdot \omega r \cdot |\vec{B}| \stackrel{!}{=} 0$$

m : Masse der rotierenden Ladung

q_1: Rotierende Ladung

q_2: Ladung im Mittelpunkt

Totale Energie in einer Kreisbahn

Für eine Kreisbahn ist die totale Energie minimal und $\dot{r} = 0$. In diesem Fall kann es in manchen Fällen von Interesse sein folgende Gleichung in Betracht zu ziehen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} E_\mathrm{tot} = 0$$

Kreisbewegung mit konstantem Radius

Bei einer Kreisbewegung mit konstantem Radius gilt stets

$$F_\mathrm{zentrifugal} = -F_\mathrm{zentripetal}$$

4.3 Trägheitsmoment

$$J \approx \sum_i r_i^2 \Delta m_i$$

Δm_i: Massenelement im Abstand r_i von der Drehachse

Trägheitsmomente einiger homogener Körper

Körper	Trägheitsmoment	Eigenschaften
Dünner Stab	$J_s \approx \frac{1}{12} ml^2$	Achse $\perp$ zu Stab
Quader (a, b, c)	$J_s = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$	Achse $\parallel$ c
Zylinder (r, h)	$J_s = \frac{1}{2} mr^2$	Achse $\parallel$ h
	$J_s = m(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12})$	Achse $\perp h$
Vollkugel	$J_s = \frac{2}{5} m * r^2$	
Hohlkugel	$J_s \approx \frac{2}{3} mr^2$	Wandstärke $d \ll r$

4.4 Rotationsenergie

Die Rotationsenergie ist die kinetische Energie eines starren Körpers:

$$E_\mathrm{rot} = \frac{1}{2} J\omega^2$$

J: Trägheitsmoment

ω: Winkel-/Drehgeschwindigkeit

Absorbierte Energie

$$E_\mathrm{rot} = h \cdot \nu = \hbar \cdot \omega$$

$h \cdot \nu$: Absorbierte Energie

ω: Winkel-/Drehgeschwindigkeit

$\hbar$: Plank'sche Konstante, $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$

$[E_\mathrm{rot}]$: $\mathrm{meV}, \mathrm{Js}$

4.5 Drehimpuls

Drehimpuls mit Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit

$$L = J\omega = mr^2\omega$$

J: Trägheitsmoment

ω: Winkelgeschwindigkeit

Drehimpuls mit Ortsvektor und des Impuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

$\vec{r}$: Ortsvektor

$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$: Impuls

Drehimpulserhaltung

Der Drehimpuls eines isolierten physikalischen Systems bleibt unverändert, egal welche Kräfte und Wechselwirkungen zwischen den Bestandteilen des Systems wirken.

Beispiel: Pirouette im Eiskunstlauf Trägheitsmoment der Arme bezüglich der Drehachse wird verringert wenn Arme eingefahren werden. Da der Gesamtdrehimpuls aber erhalten bleibt, nimmt die Rotationsgeschwindigkeit zu.

Beispiel: Drehimpuls wird nicht erhalten Ein horizontaler Stab, auf welchem eine Perle gleitet rotiert um eine vertikele Drehachse mit $\omega = \omega_0 = \text{const}$. Die Perle wird losgelassen, der Stab rotiere aber weiter mit ω_0. Der Drehimpuls bleibt in diesem Fall nicht erhalten, da eine äussere Kraft (z.B. ein Motor) wirken muss, damit der Stab weiter rotiert mit ω_0.

5 Federn

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \cdots + \frac{1}{2}k_nx_n^2$$

6 Harmonischer Oszillator

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -k_F \cdot x(t) \\ \Leftrightarrow \ddot{x}(t) &= -\left(\frac{k_F}{m}\right) \cdot x(t) \\ &= -\omega^2 \cdot x(t) \end{aligned}$$

k_F: Federkonstante

ω: Kreisfrequenz $= \sqrt{\frac{k_F}{m}}$

6.1 Einheiten

T	s	Schwingungsdauer/-periode
ν	Hz	Frequenz, Eigenfrequenz
ω	$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$	Kreisfrequenz, Eigenkreisfrequenz

6.2 Wichtige Verhältnisse bei den Grössen

$$\nu = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k_F}{m}}$$

6.3 Allgemeine Gleichung des harmonischen Oszillators

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow x(t) &= A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \\ &= C\cos(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\omega\ C\sin(\omega t + \delta) \\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2\ C\cos(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

C: Maximale Amplitude der Auslenkung x

$\omega t + \delta$: Phasenwinkel bei

δ: Phasenkonstante bei $t = 0$

Bemerkung zu C und δ Die Amplitude C und die Phasenkonstante δ lassen sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen.

Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung näherungsweise für kleine Auslenkungen

Verwende die Abschätzungen $\sin(\varphi) \approx \varphi$ und $\cos(\varphi) \approx 1$:

$$\begin{aligned} ml\ddot{\varphi} &= -mg\sin(\varphi) - \cos(\varphi)kl\sin(\varphi) \\ \Longleftrightarrow ml\ddot{\varphi} &= -mg\varphi - lk\varphi \end{aligned}$$

Allgemeine Gleichung des harmonischen Oszillators mit Offset

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t) + \boldsymbol{c}$$

$$\Longrightarrow x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + \frac{\boldsymbol{c}}{\omega^2}$$

Allgemeine Gleichung einer weiteren harmonischen Bewegung

$$\ddot{x}(t) = \omega^2 x(t)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow x(t) &= Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \\ \dot{x}(t) &= \omega Ae^{\omega t} - \omega Be^{-\omega t} \end{aligned}$$

6.4 Gleichungen anhand von Anfangsbedingungen lösen

Zur Zeit $t = 0$ sei $x = x_0$, also $x(0) = x_0$. Weiter sei bewege sich die Masse mit $v = 0$, also $\dot{x}(0) = 0$
Folgende Lösung einer Bewegungsgleichung sei gegeben:

$$x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Wir wollen nun A, B, und ω aus den Anfangsbedingungen bestimmen. Das geht wie folgt:

$$\begin{aligned} &x(0) = Ae^0 + Be^0 = A + B = x_0 \\ &\dot{x}(0) = \omega \cdot Ae^0 - \omega \cdot Be^0 = \omega(A - B) = 0 \Leftrightarrow A = B \\ &\Longrightarrow 2B = x_0 \Leftrightarrow A = B = \frac{x_0}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Lösung:} \quad x(t) = \frac{x_0}{2}e^{\omega t} + \frac{x_0}{2}e^{-\omega t}$$

6.5 Wichtige Tricks

Abschätzung des Sinus

Für $x \ll 1$ darf man die Abschätzung $sin(x) \approx x$ verwenden.

Beispiel Es gilt $z \ll \lambda$:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= -\frac{A}{\lambda} \cdot \sin(\frac{z}{\lambda}) \\ \overset{z \ll \lambda}{\Longrightarrow} \ddot{z} &= \frac{A}{\lambda^2 \cdot m} \cdot z = \text{Harmonischer Oszillator} \end{aligned}$$

Substitution

TODO

Frage nach Rückkehrzeit eines Elementes zum Anfangspunkt

Ist gefragt, zu welcher Zeit ein Punkt zum Anfangspunkt zurückkehrt in Zusammenhang mit einem harmonischen Oszillator, dann lautet die Antwort immer T (Schwingungsperiode).

6.6 Energie des harmonischen Oszillators

Potentielle Energie der harmonischen Schwingung

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= \frac{1}{2} k_{\text{F}}\ x^2 \\ &= \frac{1}{2} k_{\text{F}}\ C^2 cos^2(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

Maximale potentielle Energie Die potentielle Energie ist dann am grössten, wenn die Auslenkung maximal ist, also $x = x_{\text{max}}$. Auch gilt, dass die kinetische Energie bei x_{max} 0 ist, weil die kinetische Energie dort am kleinsten ist, wo die potentielle Energie am grössten ist.

Kinetische Energie der harmonischen Schwingung

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} m v_x^2 \\ &= \frac{1}{2} k_{\text{F}}\ C^2 sin^2(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

v_x: Geschwindigkeit des schwingenden Körpers

Mechanische Energie

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} \\ &= \frac{1}{2} k_{\text{F}}\ C^2 \end{aligned}$$

7 Elektrostatik

7.1 Einheiten

Φ_{el}	$\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}$	Elektrischer Fluss
Q	C	Ladung
C	$\frac{\text{C}}{\text{V}} = \text{F}$	Kapazität
ρ	$\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^3}$	Volumenladungsdichte
σ	$\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$	Flächenladungsdichte
λ	$\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}}$	Linienladungsdichte
ϱ_{el}	$\frac{J}{m^3}$	Energiedichte des elektrischen Feldes
κ	$\frac{\text{F}}{\text{m}} = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$	Dielektrizitätskonstane

7.2 Coulomb-Kraft (Kraft zwischen zwei Ladungen)

$$F_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

r: Abstand zwischen den Mittelpunkten von q_1 und q_2

$r =$ $\left|\vec{r_1} - \vec{r_2}\right|$

ε_0: Elektrische Feldkonstante

7.3 Elektrische Kraft (Kraft auf eine Ladung im elektrischen Feld)

$$F_{El} = q \cdot |\vec{E}|$$

$\vec{E}$: Elektrische Feldstärke

Richtung der elektrischen Kraft

Die elektrische Kraft zeigt in die gleiche Richtung wie die Feldlinien des wirkenden elektrischen Feldes.

7.4 Eigenschaften des elektrischen Feldes

Das elektrische Feld $\vec{E}$ wird durch eine Ladung q erzeugt.

Richtung elektrischer Feldlinien

Elektrische Feldlinien gehen immer von $\oplus$ nach $\ominus$. Dies ist auch die Richtung, in welcher die elektrische Kraft F_{el} zeigt.

Technische Stromrichtung

Positive Ladungen bewegen sich in gleicher Richtung wie der Strom.

Das Aufheben elektrischer Felder

Wirken zwei elektrische Felder, welche durch zwei $+q$ Ladungen erzeugt werden in einem Punkt r gleich stark aber entgegengesetzt, so heben sie sich auf.

7.5 Elektrische Felder berechnen

Coulomb'sche Gesetz

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\text{dq}}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^2}$$

$$\begin{aligned} \text{dq} &= \rho\ \text{d}^3\text{x} \quad \text{(Volumen)} \\ &= \sigma\ \text{d}^2\text{x} \quad \text{(Fläche)} \\ &= \lambda\ \text{dx} \quad \text{(Linie)} \end{aligned}$$

$\vec{r}$: Ort, bei welchem die Einwirkung des elektrischen Felds gemessen werden soll

$\vec{r}_q$: Ort der Punktladung q, welche elektrisches Feld erzeugt

V: Geladener Körper (Linie, Fläche, Volumen)

dq: Ladungselement

ρ: Volumenladungsdichte

σ: Flächenladungsdichte

λ: Linienladungsdichte

Elektrischer Fluss (Gauss'sches Gesetz für symmetrische Ladungsverteilungen)

$$\Phi_{\text{el}} = \frac{q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0} = \int_{\mathcal{A}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$
$$\Leftrightarrow \frac{q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0} = |\vec{E}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos(\omega)$$

$|\vec{A}|$: Hüllfläche, Gauss'sche Fläche

$|\vec{E}|$: Stärke des elektrischen Feldes

q_{innen}: Ladung im Inneren der Hüllfläche

ω: Winkel zwischen elektrischem Feld $\vec{E}$ und Normalenvektor der Fläche $|\vec{A}|$

Beschreibung Der durch die Oberfläche A eines Volumens V hindurchtretende Fluss Φ_{el} ist gleich der gesamten in V enthaltenen Ladung q. Der elektrische Fluss nennt man auch die Zahl der Feldlinien, die die Fläche A senkrecht durchstossen.

Elektrisches Feld einer Punktladung

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q)$$

$\vec{r}$: Ort, bei welchem die Einwirkung des elektrischen Felds gemessen werden soll

$\vec{r}_q$: Ort der Punktladung q, welche elektrisches Feld erzeugt

Elektrisches Feld einer Ladungsverteilung

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

$\vec{r}$: Ort, bei welchem die Einwirkung des elektrischen Felds gemessen werden soll

$\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n$: Ort der Punktladungen $q_1, ..., q_n$, welche das elektrische Feld erzeugen

7.6 Verschiedene Konfigurationen für elektrische Felder

Punktladung

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2}$$

Hüllfläche Konzentrische Kugel mit Radius R.

Linienladung

$$2\pi REh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Longleftrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R}$$

λ: Linienladungsdichte $= \frac{Q}{L}$

Hüllfläche Kreiszylinder der Länge a.

Flächenladung

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

σ: Flächenladungsdichte

Hüllfläche Quader mit der Höhe $2 \cdot H$, welcher von der geladenen Ebene halbiert wird. Dabei durchstossen die Feldlinien nur die beiden Deckel des Quaders. Die Feldlinien schliessen mit den Flächennormalen der Randflächen einen rechten Winkel ein; daher tragen die Randflächen nichts zum Fluss bei ($\cos(\pi/2) = 0$).

Homogen geladene Kugel

$$r \geq R: \qquad |\vec{E}(r)| = \frac{\varrho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r \leq R: \qquad |\vec{E}(r)| = \frac{\varrho r}{3\varepsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

ϱ: Volumenladungsdichte der Kugel

R: Radius der geladenen Kugel

r: Radius der Hüllfläche

Hüllfläche Kugelförmige Fläche um den Kugelmittelpunkt mit Radius r.

Homogen geladene Kugelschale

Das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugelschale mit Wandstärke d und Innenradius R lautet:

$$r < R: \qquad |\vec{E}(r)| = 0$$

$$R \leq r \leq R + d: \qquad |\vec{E}(r)| = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)$$

$$r > R + d: \qquad |\vec{E}(r)| = \frac{\varrho((R+d)^3 - R)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

ϱ: Volumenladungsdichte der Kugelschale

R: Innenradius

d: Wandstärke

r: Radius der Hüllfläche

Hüllfläche Kugelförmige Fläche um den Kugelmittelpunkt mit Radius r.

7.7 Elektrische Felder in Kondensatoren

Plattenkondensator

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}$$

Zylinderkondensator

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi r l \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Kugelkondensator und Kugel

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

7.8 Potentielle Energie im elektrischen Feld

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r}$$

q_1, q_2: Ladungen

7.9 Ladungsdichte

$$\vartheta = \frac{Q}{V}$$

ϑ: Ladungsdichte

Q: Gesamtladung

V: n-dimensionale Volumen des geladenen Körpers

Volumenladungsdichte

$$\varrho = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dV}}$$
$$\Rightarrow Q = \int \varrho \, \mathrm{dV}$$

V: Volumen des betrachteten Körpers

dV: Volumenelement, das mit $Q_{\mathrm{dV}} = \sigma \cdot \mathrm{dV}$ geladen ist

Flächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dA}}$$
$$\Rightarrow Q = \int \sigma \, \mathrm{dA}$$

A: Grösse der betrachteten Fläche

dA: Flächenelement, das mit $Q_{\mathrm{dA}} = \sigma \cdot \mathrm{dA}$ geladen ist

Linienladungsdichte

$$\lambda = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dl}}$$
$$\Rightarrow Q = \int \lambda \, \mathrm{dl}$$

l: Länge der betrachteten Linie

dl: Längenelement, das mit $Q_{\mathrm{dl}} = \lambda \cdot \mathrm{dl}$ geladen ist

7.10 Kapazität

$$C = \frac{Q}{U}$$

Q: Ladung

U: Spannung, Potentialdifferenz

Kapazität eines Plattenkondensators

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

A: Flächeninhalt der Platte

d: Plattenabstand; $d \ll \sqrt{A}$

Kapazität einer frei stehenden Kugel

$$C = 4\pi\varepsilon r$$

Kapazität eines Zylinderkondensators

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{\ln(\frac{r_a}{r_i})}$$

r_i: Innerer Radius

r_a: Äusserer Radius

ε_0: el. Feldkonstante

ε_r: rel. Permittivität

l: Länge des Zylinders; $l \ll r_a$

Kapazität eines Kugelkondensators

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right)^{-1}$$

r_i: Innerer Radius

r_a: Äusserer Radius

Plausibilitätsprüfung Versichere, dass das Ergebnis ausser von der Dielektrizitätskonstante nur von geometrischen Merkmalen wie etwa Längen und Flächen abhängt.

7.11 Kondensatoren

Elektrische Energie des geladenen Kondensators

$$E_p = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

Q: Gesamtladung

U: Spannung, Potentialdifferenz

C: Kapazität des Kondensators

7.12 Energiedichte des elektrischen Feldes

$$\varrho_{\text{el}} = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{C \cdot U^2}{A \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{1}{2} DE$$

7.13 Gesamtenergie

$$W = \int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \mathrm{d}V \text{ (Volumenintegral)}$$

7.14 Potentialdifferenz (Spannung)

$$\Delta\Phi = u_{\text{AB}} = \Phi_{\text{A}} - \Phi_{\text{B}} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}_{\text{AB}}$$

Φ_{A}: Elektrisches Potential im Punkt A

7.15 Dielektrizitätskonstante κ

$$\kappa = 1 + \rho_0 \cdot \alpha$$
$$\alpha = \frac{q^2}{\varepsilon_0 \cdot m \cdot \omega_0^2}$$

8 Magnetostatik

8.1 Einheiten

I	A	Stromstärke, Ladungsfluss
R	$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$	Widerstand
U	V	Spannung
$\vec{B}$	T	Magnetische Flussdichte, Magnetfeld
$\vec{J}$	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$	Stromdichte
σ	$\frac{\mathrm{Siemens}}{\mathrm{m}}$	

8.2 Gleichstrom

Strom (Stromstärke, Ladungsfluss)

$$I = \text{const.} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{t}}$$

Q: Ladung

Stromdichte

Allgemein

$$\vec{J} = nq\vec{v} = \rho_{\mathrm{el}}\vec{v}$$

n: Anzahl Ladungsträger pro Einheitsvolumen

q: Ladung des einzelnen Ladungsträgers

v: Mittlere Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger

ρ_{el}: Ladungsdichte

Konstante Stromdichte

$$I = \vec{J} \cdot \vec{A}$$

$\vec{A}$: Normalenvektor der durchflossene Fläche

Wird die Fläche A senkrecht durchflossen, so gilt:

$$I = J \cdot A$$

Stromdichte und elektrische Leitfähigkeit

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

σ: Elektrische Leitfähigkeit

Ohm'sches Gesetz

$$U = R \cdot I$$

U: Spannung

R: Widerstand

I: Stromstärke

8.3 Magnetisches Feld

Ein Strom I, der durch einen geradlinigen Leiter fließt, erzeugt ein Magnetfeld B, dessen Feldlinien kreisförmig um den Leiter herum verlaufen.

Richtung

Konvention auf Aufgabenblatt

$\odot$: Magnetfeld zeigt von Blatt weg zu mir

$\otimes$: Magnetfeld zeigt weg von mir in Blatt hinein

Rechte-Faust-Regel

Daumen: I, technische Stromrichtung

Rest der Hand: Richtung des Magnetfelds $\vec{B}$

Bio-Savart'sche Gesetz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V I \cdot \frac{\dot{\vec{\gamma}}(t) \times (\vec{r} - \vec{\gamma}(t))}{|\vec{r} - \vec{\gamma}(t)|^3}$$

$\vec{r}$: Ort, bei welchem die Einwirkung des Magnetfeldes gemessen werden soll

$\vec{\gamma}(t)$: Parametrisierung des Stromleiters, der von I durchflossen wird

Ampèr'sche Gesetz

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 I$$

$\vec{B}$: magnetisches Feld

S: Geschlossene Kurve um magnetisches Feld

I: Der innerhalb von S fliessende Strom

μ_0: magnetische Feldkonstante

Gültigkeit des Ampèr'schen Gesetz In folgenden Fällen darf das Ampèr'sche Gesetz nicht angewendet werden:

- Zeitlich veränderliche elektrische Felder sind involviert
- Anordnung ist nicht symmetrisch genug

8.4 Magnetische Kraft

$$\vec{F}_{\mathrm{magn}} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{mit } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$\vec{F}_{\mathrm{magn}}$: Kraft, welche auf Teilchen mit Ladung q ausgeübt wird

$\vec{v}$: Geschwindigkeit des Teilchens

$\vec{B}$: Magnetfeld

Merke: Im Magnetfeld wirkt $\vec{F}_{\mathrm{magn}}$ als Zentripetalkraft.

Rechte-Hand-Regel

Daumen: $\vec{v}$

Zeigfinger: $\vec{B}$

Mittelfinger: $\vec{F}_{\mathrm{magn}}$

Zyklotronfrequenz

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m}$$

ν: Zyklotronfrequenz, Eigenfrequenz aufgrund Umlauffrequenz geladener Teilchen im homogenen Magnetfeld

q: Ladung des Teilchens

B: Magnetische Flussdichte

m: Masse des Teilchens

9 Elektrostatik / Magnetostatik

9.1 Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = \vec{F_{\text{el}}} + \vec{F_{\text{magn}}} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$\vec{F}$: Gesamtkraft auf eine Ladung q

$\vec{F_{\text{el}}} = q \cdot \vec{E}$: Elektrische Kraft

$\vec{F_{\text{magn}}} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$: Magnetische Kraft

10 Induktion

10.1 Einheiten

Φ_{mag}	$\text{T} \cdot \text{m}^2$	Magnetischer Fluss
U	V	Elektrische Spannung

10.2 Magnetischer Fluss

Der magnetische Fluss Φ_{mag} durch A ist

$$\Phi_{\text{mag}} = \int_A \vec{B} \cdot \text{d}\tilde{\text{A}}$$

Magnetischer Fluss bei homogenem Magnetfeld durch eine Fläche A

$$\Phi_{\text{mag}} = \vec{B} \cdot \vec{A} = |\vec{B}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos(\theta)$$

A: nicht-gekrümmte Fläche

$\vec{A}$: Normalenvektor der Fläche A

Der Gauss'sche Satz und der magnetische Fluss

Da jedes Magnetfeld quellenfrei ist, sind die magnetischen Flussdichtelinien immer in sich geschlossen und besitzen weder Anfangs- noch Endpunkt. Daher ist der magnetische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche immer Null:

$$\oint_O \vec{B} \cdot \text{d}\tilde{\text{A}} = 0$$

Magnetischer Fluss bei homogenem Magnetfeld durch von Spule umschlossene Fläche A

$$\Phi_{\text{mag}} = n \cdot |\vec{B}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos(\theta)$$

A: Von Windung umschlossene Fläche (meistens Kreisfläche)

n: Anzahl Windungen

Magnetischer Fluss bei homogenem Magnetfeld durch rotierende Fläche A

$$\Phi_{\text{mag}} = \vec{B} \cdot \vec{A} = |\vec{B}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

ω: Winkelgeschwindigkeit

$\theta = \omega \cdot t$: Winkel θ zu einem Zeitpunkt t

10.3 Induzierte Spannung

$$U_{\text{ind}} = -\nabla\Phi_{\text{mag}}$$

Faraday'sche Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = \oint_{\partial A(t)} \vec{E}\text{d}\vec{s} = -\nabla\Phi_{\text{mag}} = -\int_{A(t)} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\text{d}\vec{A}$$

A: Betrachtete Fläche

∂A: Rand der betrachteten Fläche A

$\vec{E}$ Elektrisches Feld, Vektorfeld der el. Feldstärke

$\vec{B}$: Magnetfeld, magnetische Flussdichte

Induktionsspannung durch Bewegung

Durch die Bewegung eines Leiters in einem Magnetfeld wird eine Spannung induziert.

11 Kochrezepte

11.1 Dynamik

Aufstellen der Bewegungsgleichung

1. Falls ein Potential (potentielle Energie) U gegeben ist, gilt
$$F = -\nabla U$$
2. Ansonsten finde resultierende Kraft (Summe der Kräfte) auf jedem beteiligten Körper
3. Für jeden Körper: $m\ddot{x} =$ resultierende Kraft
4. Löse Bewegungsgleichung mit bekannten Mitteln aus der Analysis

11.2 Elektromagnetische Felder berechnen

Elektrisches Feld berechnen

1. Definiere eine Gaussfläche (Hüllfläche) um gegebene Punktladung oder geladenen Körper zu umhüllen
2. Zeichne falls nötig die Flächennormalen der Hüllfläche ein
3. Zeichne die Feldlinien des elektrischen Feldes ein
4. Berechne $|\vec{E}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos(\omega)$, wobei $|\vec{A}|$ die Oberfläche der Gaussfläche ist.
Beachte: Flächenabschnitte einer Hüllfläche, deren Flächennormale senkrecht zu den Feldlinien stehen ($\omega = \frac{\pi}{2}$) werden nicht dazugezählt, da $\cos(\omega = \frac{\pi}{2}) =$

0. Bei allen anderen stehen Feldlinien parallel zu den Flächennormalen, also mit einem Winkel von 0, d.h. $\cos(\omega = 0) = 1$.

5. Berechne q_{innen}. Beachte dabei, dass entweder eine Ladungsdichte ϑ oder eine Punktladung q gegeben ist
   (a) Ladungsdichte ϑ ist gegeben
   $\implies q_{\text{innen}} = \vartheta \cdot V$, wobei V das Volumen des gerade betrachteten Körpers ist (Aufgaben verlangen meistens ein gewisses Gebiet das von r abhängt zu betrachten)
   (b) Punktladung q ist gegeben
   $\implies q_{\text{innen}} = q$
6. Löse nach $|\vec{E}|$ auf

11.3 Elektrostatik

Berechnung der Kapazität

1. Bestimme das elektrische Feld $\vec{E}$ (siehe oberes Kochrezept)
2. Ermittle durch Integration über $\nabla\Phi = -\oint \vec{E}\mathrm{d}\tilde{s}$ den Betrag der Spannung U zwischen den Leitern
3. Die Kapazität ergibt sich nun aus $C = \frac{q}{U}$

12 Konstanten

Magnetische Feldkonstante $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 \, c^2}$

13 TODO

- Geschwindigkeit (oder Beschleunigung) ist unabhängig von Masse im Vakuum (siehe 1. oder 2. Vorlesung)
- Atwoodsche Fallmaschine, Kraft nach Beschleunigung richten, als z.B. zeigt Beschleunigung a nach unten, also -a, dann zählt man F_G positiv zu resultierende, da in gleiche Richtung wie Beschleunigung zeigt
- Ladungsverteilungen auf den Innen- und Aussenflächen beider Kugelschalen (+q im Inneren, -q innere Schale, +q äussere Schale)
- Federn ausbessern
- Klausur 2, A3: Gaussglocke
- Rezept für Lösen von inh DGLs aufschreiben
- Zyklotronfrequenz
- E-Feld $= E \cdot e_r$ (radial) und B-Feld $= B \cdot e_\varphi$ (tangential)

14 Masseinheiten

14.1 Einheitenvorsätze

pico	10^{-12}	nano	10^{-9}	micro	10^{-6}	mili	10^{-3}
kilo	10^{3}	mega	10^{6}	giga	10^{12}		

15 Nützliches

15.1 Taylorentwicklung

Definition des n-ten Taylorpolynoms:

$$T_n(x) := f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

a: Entwicklungspunkt

Beispiel Entwickle $\sin(x + a_0)$ um den Punkt a_0:

$$T_n(x) := \sin(a_0) + \cos(a_0) \cdot (\boldsymbol{x + a_0 - a_0}) + \mathcal{O}(x^2)$$

15.2 Körper: Volumen und Oberflächen

Kreis

Fläche

$$A = \pi r^2$$

Umfang

$$U = 2\pi r$$

Kugel

Volumen

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Oberfläche

$$O = 4\pi r^2$$

Zylinder

Volumen

$$V = G \cdot h$$

G: Grundfläche; ist meistens Kreis: $G = \pi r^2$

h: Höhe

Oberfläche

$$O = U \cdot h + 2 \cdot G$$

G: Grundfläche; Kreisfläche: $G = \pi r^2$

h: Höhe

U: Umfang der Grundfläche; Kreisumfang: $U = 2\pi r$

15.3 Parametrisierungen

Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Flächenelement

$$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

Zylinderkoordinaten

$$x = \rho\,\cos\varphi$$
$$y = \rho\,\sin\varphi$$
$$z = h$$

Volumenelement

$$\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y &= r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z &= r \cdot \cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &\in (-\pi, \pi) \\ \theta &\in (0, \pi) \end{aligned}$$

Volumenelement

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}r$$

15.4 Zu Integralen

Substitution

1. Aufstellen der Substitutionsgleichung

$$u = g(x) \quad \frac{du}{dx} = g'(x) \quad dx = \frac{du}{g'(x)}$$

Wichtig: Der Term $g'(x)$ muss sich nach der Substitution wegkürzen, da sich ansonsten von x und u abhängige Terme im Integral befinden. Deshalb ist in vielen Fällen folgendes empfehlenswerter:

$$x = h(u) \quad \frac{dx}{du} = h'(u) \quad dx = h'(u)du$$

Partielle Integration

$$\begin{aligned} \int u' \cdot v &= \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v' \\ &= \quad u \cdot v \quad - \int u \cdot v' \end{aligned}$$

15.5 Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Betrag des Vektorprodukts

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\theta$$

$\theta \in [0, \pi] \implies \sin\theta \geq 0$

Rechte-Hand-Regel für das Vektorprodukt

Daumen:	$\vec{a}$
Zeigfinger:	$\vec{b}$
Mittelfinger:	$\vec{a} \times b$

15.6 Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Skalarprodukt im kartesischen Koordinatensystem

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3$$

15.7 Normalenvektor einer Fläche

Ein Normalenvektor einer Fläche A im dreidimensionalen Raum ist ein vom Nullvektor verschiedener Vektor, der senkrecht auf dieser Ebene steht.

15.8 Steigung einer Geraden

Sei eine Gerade zwischen zwei Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gegeben. Die Steigung m der Gerade berechnet sich durch

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

15.9 Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

15.10 Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned} \text{Sinus eines Winkels} &= \frac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}} \\ \text{Kosinus eines Winkels} &= \frac{\text{Ankathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}} \end{aligned}$$