Lineare Algebra Zusammenfassung

Herbstsemester 2011

Giuseppe Accaputo

Rechnergestützte Wissenschaften
ETH Zürich

1 Lineare Gleichungssysteme

1.1 Rang

- Der Rang einer Matrix gibt an, wie viel linear unabhängige Spaltenvektoren eine Matrix besitzt
- Der Rang einer $m \times n$-Matrix kann maximal $\min(m; n)$ betragen

Weiter Aussagen zum Rang Sei A eine $m \times n$-Matrix, B eine reguläre $m \times m$-Matrix und C eine reguläre $n \times n$-Matrix; dann gilt

(i) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$

(ii) $\text{rang}(BA) = \text{rang}(A)$

(iii) $\text{rang}(AC) = \text{rang}(A)$

1.2 Aussagen zu homogenen und linearen Gleichungssystemen

Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $r = \text{rang}(A)$; dann können folgende Aussagen gemacht werden über die Lösbarkeit folgender Gleichungssysteme:

1. $r < n \iff Ax = 0$ hat eine nichttriviale Lösung
2. $r = m \iff Ax = b$ ist für beliebige rechte Seiten lösbar
3. $r < m \iff Ax = b$ ist *nicht* für beliebige rechte Seiten lösbar
4. Es sei $m = n$. $Ax = b$ ist eindeutig lösbar $\iff Ax = b$ ist für beliebige rechte Seiten lösbar
5. Sei $m = n$. $Ax = b$ ist für beliebige rechte Seiten lösbar $\iff$ Das zugehörige System $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung

1.3 Tipp: Gauss'sche Eliminationsverfahren

- Versuche wenn immer möglich eine 1 als Pivotelement zu wählen
- *Vermeide* es wenn immer möglich, Variablen ($\alpha, \beta, \ldots$ in A) als Pivotelemente auszuwählen
- Versuche immer $Ax = b$ so in Zeilenstufenform zu bringen, ohne Spalten verschieben zu müssen.

1.4 Lösungsmenge unter bestimmten Bedingungen bestimmen

1. Sei $Ax = b$ gegeben
2. Seien Variablen $B = \{a, b, c, \dots\} \subset \mathbb{R}$ gegeben, für welche gewisse Bedingungen je nach Lösung definiert werden müssen
3. Wende Gauss'sche Eliminationsverfahren an um $Ax = b$ auf Zeilenstufenform zu bringen. $G(A)$ ist unsere neue Matrix in Zeilenstufenform.

   Achtung Wähle *nie* eine Variable aus B als Pivot, da eine Division durch solch eine Variable in eine Division durch Null resultieren könnte.
4. Bestimme die Lösungsmenge für folgende Fälle:
   (a) $Ax = b$ besitzt keine Lösung
      i. Stelle sicher, dass $G(A)$ jegliche Verträglichkeitsbedingungen verletzt.
      Beispiel: $0 \cdot x_3 = b \implies$ Wähle $b \neq 0$
      ii. Lösungsmenge $\mathbb{L} = \emptyset$
   (b) $Ax = b$ besitzt Lösungen mit n freien Parameter
      i. Stelle sicher, dass $G(A)$ genau n Nullzeilen besitzt
      ii. Wähle die Variablen in B so, dass die gewünschte Anzahl Nullzeilen entstehen.
      Beispiel: $a \neq 3 \implies \mathbb{L} = \left\{\alpha \cdot (\dots) + \dots \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{3}\}\right\})$
      iii. Löse $G(A)$ durch Rückwärtseinsetzen
      iv. Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{\alpha \cdot (\dots) + \beta \cdot (\dots) + \dots \;\middle|\; \alpha, \beta, \dots \in \mathbb{R} \setminus K\right\}$, wobei K die Menge aller Werte ist, welche die Variablen aus B nicht annehmen dürfen.
   (c) $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
      i. Wähle die Variablen aus B in $G(A)$ so, dass weder Nullzeilen entstehen noch Verträglichkeitsbedingung verletzt werden können.
      ii. Löse $G(A)$ durch Rückwärtseinsetzen. Die Variablen aus B in $G(A)$ sollten stehen gelassen werden und *nicht* durch irgendwelche Werte substituiert werden.
      iii. Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{\alpha \cdot (\dots) + \beta \cdot (\dots) + \dots \;\middle|\; \alpha, \beta, \dots \in \mathbb{R} \setminus K\right\}$, wobei K die Menge aller Werte ist, welche die Variablen aus B nicht annehmen dürfen.

      Die Vektoren aus der Lösungsmenge sollten Variablen aus B enthalten.

1.4.1 Beispiel: Lösen von Gleichungssystemen

Es seien Bedingungen für $a, b \in \mathbb{R}$ zu definieren, so dass das folgendes System

$$\left(\ A \mid b\ \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & a & 5 \\ 3 & -4 & 5 & b \end{array}\right)$$

1. keine Lösung
2. Lösungen mit einem freien Parameter
3. genau eine Lösung

besitzt. Bestimme auch die entsprechenden Lösungsmengen.

1. Das Gauss'sche Eliminationsverfahren liefert

$$G(A) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & a-6 & -3 \\ 0 & 0 & -2a+8 & b-6 \end{array}\right)$$

2. Fallunterscheidungen:
   (a) Keine Lösung:

$$a = 4, b \neq 6 \implies \underline{\underline{\mathbb{L} = \emptyset}}$$

   (b) Lösungen mit einem freien Parameter:

$$a = 4, b = 6 \implies \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} -2+\alpha \\ -3+2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R}\right\}}}$$

   (c) Genau eine Lösung:

$$a \neq 4 \implies \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} -2 + \dfrac{(2a-6)(b-6)}{-2a+8} \\ \vdots \end{pmatrix}\right\}}}$$

2 Matrizen

2.1 Invertierbare (reguläre) Matrizen

2.1.1 Eigenschaften der Inversen

Seien A, B invertierbare $n \times n$ Matrizen; dann gilt:

(i) $A^{-1}A = I_n$

(ii) A^{-1} ist invertierbar $\implies (A^{-1})^{-1} = A$

(iii) I_n ist invertierbar $\implies I_n^{-1} = I_n$

(iv) AB ist invertierbar $\implies (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(v) A^T ist invertierbar $\implies (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

2.1.2 Zusammenhang zwischen dem Lösen eines linearen Gleichungssystems und der Inversen der Koeffizientenmatrix

Für jede $n \times n$-Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist invertierbar

(ii) $Ax = b$ ist für jedes b lösbar

(iii) $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$

2.2 Orthogonale Matrizen

Definition Eine $n \times n$-Matrix A heisst *orthogonal*, falls $A^T A = I_n$ gilt. Seien A, B orthogonale $n \times n$-Matrizen; dann gilt:

(i) A ist invertierbar $\implies A^-1 = A^T$

(ii) A^{-1} ist orthogonal

(iii) AB ist orthogonal

(iv) I_n ist orthogonal

2.2.1 Orthonormiertheit

Die Vektoren $q_1, q_2, \dots, q_n$ heissen *orthonormiert*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Alle Vektoren sind paarweise orthogonal zu einander: $\langle q_i, q_j \rangle = 0 \quad i \neq j$

(ii) Der Nullvektor ist nicht enthalten in der Menge von Vektoren: $q_i \neq \vec{0} \quad \forall i$

(iii) Alle Vektoren sind mit Norm 1 normiert: $\|q_i\| = 1 \quad \forall i$

Satz Eine Matrix mit orthonormalen Spalten wird orthogonale Matrix genannt

2.3 Transponierte

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2.4 Rechenregeln

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(AB)^T = B^T A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $A^0 = E$
5. $A^{-p} = (A^{-1})^p$
6. $A^{p+q} = A^p A^q$
7. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2.5 LR-Zerlegung

2.5.1 Invertierbar

Ist A invertierbar, so ist auch R invertierbar.

2.5.2 Determinante

$$\det(A) = \det(L \cdot R) = \det(L) \cdot \det(R) = \det(R) = r_{1,1} \cdot r_{2,2} \cdots r_{n,n}$$

2.6 LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschungen

1. A und b sind gegeben
2. Wende Gauss'sche Eliminationsverfahren auf A an und notiere die Eliminationsfaktoren unterhalb jedes Pivotelements. $G(A)$ ist unsere neue Matrix.
3. Lese L und R von $G(A)$ ab
   (a) L ist die untere Dreiecksmatrix von $G(A)$ mit lauter 1en in der Diagonalen
   (b) R ist die obere Dreiecksmatrix von $G(A)$
4. Löse $Lc = b$ durch Vorwärtseinsetzen
5. Löse $Rx = c$ durch Rückwärtseinsetzen

2.6.1 Beispiel: LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschungen

1. Gegebene Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 25 \end{pmatrix}$$

2. Wende Gauss'sche Eliminationsverfahren auf A an. Dabei notiert man sich die Eliminationsfaktoren unterhalb jedes Pivotelements:

$$\begin{array}{c} \\ 3 \\ -1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \\ -2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ \mathbf{3} & 4 & -1 \\ \mathbf{-1} & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow G(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ \mathbf{3} & 4 & -1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & 3 \end{pmatrix}$$

3. L und R ablesen:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Löse nun $Lc = b$ durch Vorwärtseinsetzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 25 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow c_1 = 4 \qquad c_2 = -13 \qquad c_3 = 3$$

5. Löse nun $Rx = c$ durch Rückwärtseinsetzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{x_1 = 2 \qquad x_2 = -3 \qquad x_3 = 1}}$$

2.7 LR-Zerlegung mit Zeilenvertauschungen

1. A und b sind gegeben
2. P ist Permutationsmatrix (Einheitsmatrix)
3. Wende Gauss'sche Eliminationsverfahren auf $\left(\begin{array}{c|c} P & A \end{array}\right)$ an und notiere die Eliminationsfaktoren unterhalb jedes Pivotelements. $G(A)$ ist unsere neue Matrix.
4. Lese L und R von $G(A)$ ab
   (a) L ist die untere Dreiecksmatrix von $G(A)$ mit lauter 1en in der Diagonalen
   (b) R ist die obere Dreiecksmatrix von $G(A)$
5. Löse $Lc = Pb$ durch Vorwärtseinsetzen
6. Löse $Rx = c$ durch Rückwärtseinsetzen

3 Vektorräume

3.1 Defintion

Ein Vektorraum V erfüllt folgende Axiome für $a, b, c \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(i) $a + b = b + a$

(ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(iii) $\exists 0 \in V$ so dass $a + 0 = a$

(iv) $\exists(-a) \in V$ so dass $a + (-a) = 0$

(v) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$

(vi) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

(vii) $\exists 1 \in V$ so dass $1 \cdot a = a$

3.2 Unterräume

Eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ eines Vektorraums V heisst *Unterraum* von V falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $a, b \in U \implies a + b \in U$

(ii) $a \in U, \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot a \in U$

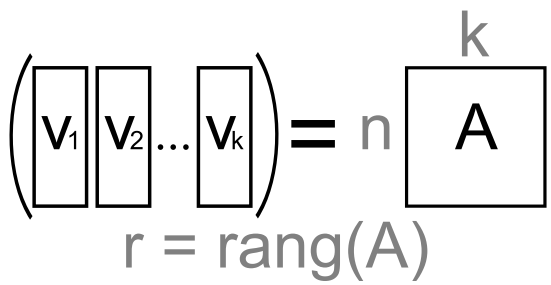
3.3 Lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a_n$ aus dem Vektorraum V heissen *linear unabhängig*, falls aus

$$x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots + x_n a^{(n)} = 0$$

folgt, dass $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ gilt.

3.4 Erzeugendensystem, Basis, lineare Unabhängigkeit



$r < k \implies$ Vektoren sind linear abhängig
$r = k \implies$ Vektoren sind linear unabhängig
$r = n \implies$ Vektoren bilden ein Erzeugendensystem
$r = n = k \implies$ Vektoren bilden eine Basis
Falls $k = n$: $\det(A) = 0 \implies$ Vektoren bilden Basis
$\det(A) \neq 0 \implies$ Vektoren sind erzeugend und linear abhängig

3.5 Basis

3.5.1 Basis aus vorgegebenen Vektoren bestimmen

1. Die Vektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a_k$ mit $a_i \in V$ und $i \in [1, n]$ sind gegeben
2. Identifiziere Dimension n (Anzahl Vektorkomponenten)
3. Wende Gauss'sche Eliminationsverfahren auf $A = \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & a^{(n)} \end{pmatrix}$ an (Gegebene Vektoren sind Spalten von A). Wir erhalten $G(A)$

   Kontrolle Es muss $\mathrm{rang}(A) \geq n$ gelten, damit n linear unabhängige Basisvektoren ausgewählt werden können
4. Eine Basis von V besteht nun aus genau n Spaltenvektoren aus A, welche in $G(A)$ ein Pivotelement enthalten

3.5.2 Beispiel: Basis bestimmen

Folgende Vektoren erzeugen den Vektorraum V. Man bestimme unter diesen eine Basis von V:

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ a^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$
$$a^{(3)} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\ a^{(4)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

1. Dimension $n = 3$
2. Wende Gauss'sche Eliminationsverfahren an:

$$G(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Kontrolle: $\text{rang}(A) = 3 \leq n \quad \checkmark$
4. Wähle 3 Spaltenvektoren aus A aus, welche in $G(A)$ Pivotvektoren sind. Diese Vektoren bilden eine Basis von V:

$$\underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} \right\}}}$$

3.6 Norm

Sei V ein Vektorraum. Eine Funktion, die jedem Vektor $a \in V$ eine reelle Zahl $\|a\|$ zuordnet, heisst *Norm* (oder Länge) in V, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\|a\| \leq 0 \quad \forall a \in V$

(ii) $\|a\| = 0 \implies a = 0$

(iii) $\|\alpha \cdot a\| = |\alpha| \cdot \|a\| \quad \forall a \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(iv) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad \forall a, b \in V$ (Dreiecksungleichung)

3.6.1 Matrixnormen

$$||A|| = \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{||Ax||}{||x||}$$

$$||A||_2 = \sqrt{\max\{\text{Eigenwerte von } A^T A\}} \quad \text{Spektralnorm}$$

$$||A||_1 = \max_i \{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\} \quad \text{Zeilensummennorm}$$

$$||A||_\infty = \max_j \{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\} \quad \text{Spaltensummennorm}$$

3.7 Skalarprodukt

Sei V ein Vektorraum. Eine Funktion, die jedem Paar x, y von Vektoren eine reelle Zahl $\langle x, y\rangle$ zordnet, heisst *Skalarprodukt im Vektorraum* V, falls gilt:

(i) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \quad \forall x, y, z \in V$ (Linearität im zweiten Faktor)

(ii) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ (Linearität im zweiten Faktor)

(iii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall x, y \in V$ (Symmetrie)

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$ (Positive Definitiheit)

(v) $\langle x, x\rangle = 0 \implies x = 0$ (Positive Definitheit)

3.7.1 Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y\rangle = x^T y$$

3.7.2 Skalarprodukt in $C[a, b]$

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

3.8 Bemerkungen zu den Gram-Schmidtsche Verfahren

3.8.1 Tipp: Kontrolliere Vektoren vor der Anwendung der Algorithmen

Kontrolliere, welche der gegebenen Vektoren $q_1, \dots, q_n$ bereits ein Orthonormalsystem (für Orthonormalisierung) oder Orthogonalsystem (für Orthogonalisierung) bilden, also folgendes gilt:

(i) Alle Vektoren sind paarweise orthogonal zu einander: $\langle q_i, q_j \rangle = 0 \quad i \neq j$

(ii) Der Nullvektor ist nicht enthalten in der Menge von Vektoren: $q_i \neq \vec{0} \quad \forall i$

(iii) Alle Vektoren sind mit Norm 1 normiert: $\|q_i\| = 1 \quad \forall i$ (muss nur für Orthonormalsystem erfüllt sein)

Bilden die Vektoren $q_1, \dots, q_k$ ein Orthonormalsystem (oder Orthogonalsystem), so kann die Orthonormalisierung (oder Orthogonalisierung) beim Schritt $k+1$ begonnen werden. Dabei ist $w_{k+1} = q_{k+1}$ (dieser Vektor ist nich Teil des Systems) und $v_i = q_i \quad i \in [1, k]$ (Vektoren des Systems)

3.9 Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Der folgende Algorithmus berechnet zu den linear unabhängigen Vektoren $w_1, \dots, w_n$ ein *Orthogonalsystem* von n paarweise orthogonalen Vektoren, das denselben Untervektorraum erzeugt. $v_1, \dots, v_n$ sind die Vektoren des Orthogonalsystems.

$$\begin{aligned}
v_1 &= w_1 \\
v_2 &= w_2 - \frac{\langle v_1, w_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \\
v_3 &= w_3 - \frac{\langle v_1, w_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, w_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 \\
&\vdots \\
v_n &= w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_i, w_n \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i
\end{aligned}$$

3.10 Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Der folgende Algorithmus berechnet zu den linear unabhängigen Vektoren $w_1, \dots, w_n$ ein *Orthonormalsystem* von n normierten, paarweise orthogonalen Vektoren, das denselben Untervektorraum erzeugt. $v_1, \dots, v_n$ sind die Vektoren des Orthonormalsystems.

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} \\
v_2' &= w_2 - \langle v_1, w_2 \rangle \cdot v_1 \\
v_2 &= \frac{v_2'}{\|v_2'\|} \\
v_3' &= w_3 - \langle v_1, w_3 \rangle \cdot v_1 - \langle v_2, w_3 \rangle \cdot v_2 \\
v_3 &= \frac{v_3'}{\|v_3'\|} \\
&\vdots \\
v_n' &= w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_i, w_n \rangle \cdot v_i \\
v_n &= \frac{v_n'}{\|v_n'\|}
\end{aligned}$$

4 Determinanten

4.1 Definition

Die Determinante einer quadratischen Matrix charakterisiert, ob eine Matrix regulär (Determinante $\neq 0$) oder singulär (Determinante $= 0$) ist.

4.2 Eigenschaften

(i) Vertauscht man zwei Zeilen in der Matrix A, so ändert die Determinante ihr Vorzeichen

(ii) Addiert man zu einer Zeile in der Matrix A ein Vielfaches einer anderen Zeile, so bleibt die Determinante unverändert

(iii) Multipliziert man eine Zeile in der Matrix A mit einem Faktor α, dann vervielfacht sich die Determinante um den Faktor α

(iv) Die Determinante einer Matrix A mit zwei gleichen Zeilen ist gleich null

(v) Die Determinante einer Matrix A, die eine Nullzeile enhält, ist gleich null

Bemerkung Diese Aussagen gelten auch für die Spalten einer Matrix A

4.3 Rechenregeln

(i) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

(ii) $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$ für alle $n \times n$ Matrizen A und alle Skalare λ

(iii) A ist quadratisch $\implies \det(A^T) = \det(A)$

(iv) A ist Dreiecksmatrix $\implies \det(A) =$ Produkt der Diagonalelemente

(v) $\det(A^n) = \det(A)^n \qquad n \in \mathbb{R}$

(vi) Ist A invertierbar, so gilt $\det(A) \neq 0$ und

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

4.4 Tipp: Determinante bestimmen

- Halte Ausschau vor gleichen Matrizenzeilen, denn dann gilt $\det(A) = 0$
- Versuche die Matrix mit dem Gauss'schen Eliminationsverfahren in die Zeilenstufenform zu bringen. Bei vollem Rang haben wir eine obere Dreiecksmatrix und die Determinante kann leicht berechnet werden:

  $$\det(A) = (-1)^r \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} \qquad \text{(Produkt der Diagonalelemente)}$$

  mit $r =$ Anzahl Zeilenvertauschungen.

4.5 Determinante und lineare Gleichungssysteme

4.5.1 Bedeutung der Determinante

1. $\det(A) \neq 0$:
   (i) $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung
   (ii) $Ax = b$ hat für beliebige rechte Seiten b genau eine Lösung
   (iii) A ist regulär
2. $\det(A) = 0$:
   (i) $Ax = 0$ hat unendlich viele Lösungen
   (ii) $Ax = b$ hat in Abhängigkeit von b keine oder unendlich viele Lösungen
   (iii) A ist singulär

4.5.2 Äquivalente Aussagen zu Determinanten und linearen Gleichungssystemen

Für jede $n \times n$-Matrix sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Matrix A ist invertierbar
2. $\det(A) \neq 0$
3. Im Gauss-Endschema ist $r = n$
4. $Ax = b$ ist für jedes b lösbar
5. Die Lösung von $Ax = b$ ist eindeutig bestimmt
6. $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$

4.6 Berechnung von Determinanten

4.6.1 Schachbrettregel

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots & + & - \\ - & + & \dots & & & & \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ - & + & - & + & \dots & - & + \end{pmatrix}$$

4.6.2 Determinante einer Dreiecksmatrix

Sei A eine Diagonalmatrix mit $A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$; dann gilt

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk} \qquad \text{(Produkt der Hauptdiagonalelemente)}$$

4.6.3 Determinante der LR-Zerlegung mit Zeilenvertauschungen

Es gelte $LR = PA$; dann folgt

$$\det(A) = \det(P) \cdot \det(R) = (-1)^{\text{Anzahl Zeilenvertauschungen}} \cdot \det(R)$$

4.6.4 2×2 Matrizen

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb.$$

4.6.5 3×3 Matrizen: Regel von Sarrus

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$= aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

4.6.6 Quadratische Matrizen mit 0er-Blöcken

Sei eine Matrix M in folgender Gestalt gegeben

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

A: $m \times m$-Matrix
B: $m \times n$-Matrix
C: $n \times n$-Matrix
M: $(m+n) \times (m+n)$-Matrix

$$\Longrightarrow \underline{\det(M) = \det(A) \cdot \det(C)}$$

Beispiel

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det(M) = \det(M) \cdot \det(C)$$
$$\Longleftrightarrow \det(M) = (4-16) \cdot (32-18) = \underline{\underline{-168}}$$

5 Ausgleichsrechnung - Methode der kleinsten Quadrate

5.1 Ausgleichsrechnung mit Normalgleichungen

1. Identifiziere die zu bestimmenden Variablen (die unbekannten Grössen) und notiere sie als x
2. Stelle Gleichungen auf anhand der unbekannten Grössen und Messwerte.

   Kontrollen:

   (a) Es sollten mehr Gleichungen als Unbekannte vorhanden sein
   (b) Keine zwei Gleichungen dürfen gleich sein, da das Gleichungssystem ansonsten nicht eindeutig lösbar ist
3. Stelle Koeffizientenmatrix A auf basierend auf den eben bestimmten Gleichungen
4. Notiere die zu den Gleichungen gehörenden Messwerten (rechte Seite des Gleichungssystems) als c
5. Berechne $A^T A$ und $A^T c$
6. Löse $A^T A x = A^T c$

5.1.1 Beispiel 1: Ausgleichsrechnung

Seien C, G, S, Z Strecken und seien zusätzlich die folgenden Distanzen gegeben:

$Z-G$	$S-G$	$G-C$	$C-S$	$Z-C$
280	390	400	210	118

Wir sind nun an den tatsächlichen Distanzen $G \to Z = a \qquad Z \to S = b \qquad Z \to C = c$ interessiert.

1. Unbekannte Grössen identifizieren:

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

2. Gleichungen anhand der unbekannten Grössen und den Messwerten aufstellen:

$$\begin{aligned} &Z-G = a = 280 \\ &S-G = a+b = 390 \\ &G-C = a+c = 400 \\ &C-S = b+c = 210 \\ &Z-C = c = 118 \end{aligned}$$

3. Koeffizientenmatrix A aufstellen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Messwerte notieren:

$$c = \begin{pmatrix} 280 \\ 390 \\ 400 \\ 210 \\ 118 \end{pmatrix}$$

5. Löse $A^T A x = A^T c$:

$$A^T A x = A^T c \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1070 \\ 1 & 2 & 1 & 600 \\ 1 & 1 & 3 & 728 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{a = 285.1667 \qquad b = 100.3333 \qquad c = 114.1667}}$$

5.1.2 Beispiel 2: Ausgleichsrechnung

Seien folgende Punkte gegeben:

x_i	-1	0	1	2
y_i	0	1	3	4

Man bestimme das quadratische Polynom $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ so, dass die Summe der Fehlerquadrate in y-Richtung minimal wird

1. Unbekannte Grössen identifizieren:

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

2. Gleichungen anhand der unbekannten Grössen und den Messwerten aufstellen:

$$\begin{aligned} f(-1) &= a - b + c = 0 \\ f(0) &= c = 1 \\ f(1) &= a + b + c = 3 \\ f(2) &= 4a + 2b + c = 4 \end{aligned}$$

3. Koeffizientenmatrix A aufstellen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Messwerte notieren:

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5. Löse $A^T A x = A^T c$:

$$\underline{\underline{a = 0 \qquad b = 1.4 \qquad c = 1.3}}$$

$$\Longrightarrow f(x) = 1.4 \cdot x + 1.3$$

5.2 QR-Zerlegung

Definition Zu jeder $m \times n$-Matrix existiert eine orthogonale Matrix Q ($Q^TQ = QQ^T = I_n$) und eine Matrix $R = \begin{pmatrix} R_0 \\ \hline 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n \text{ Zeilen} \\ \}m-n \text{ Zeilen} \end{matrix}$ wobei R_0 eine obere Dreiecksmatrix ist, so dass gilt:

$$A = QR$$

Fehlergleichungssystem für QR-Zerlegung $Q^TAx - Q^Tc = Q^Tr = s$

5.3 Ausgleichsrechnung mit QR-Zerlegung

1. Seien die $m \times n$-Matrix A und die Matrizen c und Q gegeben
2. Berechne R:
$$R = Q^TA$$
Kontrolle R sollte folgende Form haben: $R = \begin{pmatrix} R_0 \\ \hline 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n \text{ Zeilen} \\ \}m-n \text{ Zeilen} \end{matrix}$ wobei R_0 eine obere Dreiecksmatrix ist
3. Berechne d:
$$d = Q^Tc$$
4. Lese R_0 aus R heraus (n obersten Zeilen in R)
5. Lese d_0 aus d heraus:
$$d = \begin{pmatrix} d_0 \\ \hline d_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n \text{ Zeilen} \\ \}m-n \text{ Zeilen} \end{matrix}$$
6. Berechne x:
$$R_0x = d_0$$
   (a) Falls nach der Länge des Residuenvektors r gefragt ist, verwende folgende Gleichungen:
$$\|r\| = \|Qs\| = \|Rx - d\|$$

6 Lineare Abbildungen

In diesem Kapitel ist $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung

$$\mathcal{F} : V \to W$$

6.1 Linearität

Die Abbildung $\mathcal{F}$ heisst *lineare Abbildung*, wenn für alle $x, y \in V$ und $a \in \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen gelten:

(i) $\mathcal{F}(a \cdot x) = a \cdot \mathcal{F}(x)$

(ii) $\mathcal{F}(x + y) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$

6.2 Abbildungsmatrix

Zu einer linearen Abbildung $\mathcal{F}$ gehört eine *Abbildungsmatrix* $A_\mathcal{F}$. Dabei ist $A_\mathcal{F}$ eine $m \times n$ Matrix mit $m = \dim(W)$ und $n = \dim(V)$.

6.3 Abbildungsmatrix bestimmen

1. Sei $\mathcal{G} : V \to W \quad x \mapsto x'$ eine lineare Abbildung die gegeben ist
2. Stelle Dir $\mathcal{G}$ als Gleichungssystem vor
$$\mathcal{G} : A \cdot x \in V = x' \in W$$
3. A ist unsere gesuchte Abbildungsmatrix $A_\mathcal{G}$

   Kontrolle Die Abbildungmatrix $A_\mathcal{G}$ ist eine $\dim(W) \times \dim(V)$-Matrix

6.3.1 Beispiel: Abbildungsmatrix bestimmen

Man bestimme die Abbildungsmatrix $A_\mathcal{G}$ der folgenden linearen Abbildung $\mathcal{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{G} : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}x_1 - x_2 \\ x_1 - \sqrt{3}x_2 \end{pmatrix}$$

1. $A_\mathcal{G}$ ist eine 2×2 Matrix
2. $\mathcal{G}$ als Gleichungssystem:
$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$$\implies \underline{\underline{A_\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}}}$$

6.4 Geometrische Interpretation einer Abbildungsmatrix

1. Sei $G : A \cdot x \in V = x'$ eine lineare Abbildung die gegeben ist
2. Betrachte die Wirkung des i-ten Spaltenvektors $a^{(i)}$ von A auf den i-ten Einheitsvektor $e^{(i)}$:
$$e^{(1)} \mapsto a^{(1)} \qquad e^{(2)} \mapsto a^{(2)} \qquad \dots \qquad e^{(n)} \mapsto a^{(n)}$$
3. Mögliche Interpretationen und Abbildungsmatrizen:
   - Achsenspiegelung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   - Ebenspiegelung an der Ebene $x_1 = x_3$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   - Streckung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$
   - Drehmatrizen im $\mathbb{R}^3$:
$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
4. Wichtige Winkel für Drehungen:

α:	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos(\alpha)$:	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin(\alpha)$:	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

6.5 Kern

Der *Kern* von $\mathcal{F}$ ist die Lösungsmenge von $Ax = 0$:

$$\ker(\mathcal{F}) = \{x \in V \mid Ax = 0\}$$

$\ker(\mathcal{F})$ ist ein Unterraum von V.

6.6 Kern bestimmen

1. Die $m \times n$-Abbildungsmatrix A sei gegeben
2. Löse $Ax = 0$
3. $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ sind Lösungen von $Ax = 0$
4. $\ker(\mathcal{F}) = \operatorname{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}\}$
5. Dimension des Kerns: $\dim(\operatorname{im}(A)) = n - \operatorname{rang}(A)$

6.6.1 Beispiel: Kern bestimmen

Bestimme den Kern der folgenden Abbildungsmatrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Löse $Ax = 0$:

$$Ax = 0 \iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies \begin{array}{ll} x_1 = & \alpha - \beta \\ x_2 = & 2\beta \\ x_3 = & \beta \\ x_4 = & \alpha \end{array}$$

$$\implies \underline{\underline{\ker(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}}$$

6.6.2 Basis des Kerns bestimmen

1. Löse $Ax = 0$
2. Wähle $n - r$ linear unabhängige Vektoren

6.7 Bild

Das *Bild* von $\mathcal{F}$ ist die Menge von Vektoren, für welche $Ax = b$ lösbar ist:

$$\operatorname{im}(\mathcal{F}) = \{y \in W \mid \exists\, x : \; Ax = y\}$$

$\operatorname{im}(\mathcal{F})$ ist ein Unterraum von W.

6.8 Bild bestimmen

1. Die $m \times n$-Abbildungsmatrix A sei gegeben
2. Wende Gauss'sche Eliminationsverfahren auf A an. Wir erhalten $G(A)$
3. Das Bild wird mindestens von den Spaltenvektoren in A aufgespannt, welche in $G(A)$ ein Pivotelement enthalten:

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a_n\}$$

   Kontrolle Es müssen mindestens $r = \mathrm{rang}(A)$ linear unabhängige Vektoren Teil von $\mathrm{im}(A)$ sein

   Bemerkung $\mathrm{im}(A)$ kann auch linear abhängige Vektoren enthalten, solange r linear unabhängige Vektoren Teil von $\mathrm{im}(A)$ sind

4. Dimension des Bildes: $\dim(\mathrm{im}(A)) = \mathrm{rang}(A)$

6.8.1 Beispiel: Bild bestimmen

Bestimme das Bild der folgenden Abbildungsmatrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Wende Gauss'sche Eliminationsverfahren an. Dabei sind Pivotspalten mit einem Kreis markiert:

$$G(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Das Bild wird von den Spaltenvektoren in A aufgespannt, welche in $G(A)$ ein Pivotelement enthalten (erste und zweite Spalte):

$$\underline{\underline{\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}}}$$

6.9 Basis des Bildes bestimmen

1. Löse $Ax = 0$
2. Eine Basis von $\mathrm{im}(A)$ besteht nun aus genau n Pivotspalten in A:

$$\left\{b^{(1)}, \dots, b^{(n)}\right\}$$

6.10 Dimension von Bild und Kern

Sei A die $m \times n$-Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\mathcal{G} : V \subset \mathbb{R}^n \to W \subset \mathbb{R}^m$; dann gilt

(i) $\dim(\mathrm{im}(A)) = \mathrm{rang}(A)$

(ii) $\dim(\ker(A)) = \dim(V) - \mathrm{rang}(A)$

(iii) $\dim(\mathrm{im}(A^T)) = \dim(\mathrm{im}(A))$

(iv) $\dim(\mathrm{im}(A)) + \dim(\ker(A)) = \dim(V)$

6.11 Zusammensetzung linearer Abbildungen

Seien $A_1, \dots, A_n$ lineare Abbildungen; dann ist

$$A := A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_n$$

wieder eine lineare Abbildung. Die Verknüpfung $\circ$ entspricht dabei der Matrixmultiplikation

6.12 Koordinatentransformation

6.13 Orthogonale und längentreue Abbildungen

Sei folgende lineare Abbildung gegeben:

$$\mathcal{G} : x \in \mathbb{R}^n \mapsto x' = Ax \in \mathbb{R}^n$$

6.13.1 Orthogonale Abbildungen

Die Abbildung $\mathcal{G}$ heisst *orthogonal*, falls gilt

$$\langle x', y' \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

6.13.2 Längentreue Abbildungen

Die Abbildung $\mathcal{G}$ heisst *längentreu*, falls gilt

$$\|x'\| = \|Ax\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

6.13.3 Äquivalente Aussagen zu orthogonale und längentreue Abbildungen

(i) $\mathcal{G}$ ist orthogonal

(ii) $\mathcal{G}$ ist längentreu

(iii) Die Spalten von A bilden eine orthonormale Basis in $\mathbb{R}^n$

(iv) Die Matrix A ist orthogonal; es gilt

$$A^T = I \text{ bzw. } A^T = A^{-1}$$

7 Das Eigenwertproblem

7.1 Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren berechnen

1. Die Matrix A sei gegeben
2. Berechne die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda)$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \stackrel{!}{=} 0$$

3. Die Nullstellen λ_i sind dabei die Eigenwerte von A
4. Wende das Gauss'sche Eliminationsverfahren für alle Eigenwerte λ_i auf das folgende homogene Gleichungssystem an:

$$(A - \lambda_i \cdot I_n) \cdot x = 0$$

   Kontrolle Nach der Anwendung des Gauss'schen Eliminationsverfahren muss mindestens eine Nullzeile vorhanden sein. Wenn dies nicht der Fall ist, so wurde falsch gerechnet.

5. Die Eigenvektoren $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}$ erhält man durch das Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda_i \cdot I_n) \cdot x = 0$. Dabei spannen die Eigenvektoren den Eigenraum E_{λ_i} des Eigenwerts λ_i auf:

$$E_{\lambda_i} = \operatorname{span}\{v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}\}$$

   Eigenvektoren komplexer Eigenwerte Beachte Regel im folgenden Unterkapitel für die Bestimmung Eigenvektoren komplexer Eigenwerte.

6. Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts λ_i ist $\dim(E_{\lambda_i})$ = Anzahl Eigenvektoren $v^{(i)}$

7.1.1 Komplexe Eigenwerte

Sei $\lambda = a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ ein Eigenwert der reellen Matrix A mit Eigenvektor $u = x + \mathrm{i}y$; dann gilt:

(i) $\overline{\lambda} = a - \mathrm{i}b$ ist der Eigenwert zum Eigenvektor $\overline{u} = x - \mathrm{i}y$

(ii) x, y sind linear unabhängig

7.1.2 Mitternachtsformel

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

7.2 Diagonalisierung

Falls A diagonalisierbar ist, so existieren Matrizen D und T, so dass gilt

$$D = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

7.3 Diagonalisierung einer quadratischen Matrix

1. Die Matrix A sei gegeben
2. Berechne die Eigenwerte von A
3. Überprüfe, ob A diagonalisierbar (halbeinfach) ist (begründe!):
   (a) Ist A symmetrisch und reell, so handelt es sich um eine halbeinfache Matrix und deshalb diagonalisierbar
   (b) A ist diagonalisierbar genau dann wenn folgendes erfüllt ist:
   $$\forall \lambda_i : \text{ alg. Vielf.} = \text{geom. Vielf.}$$
4. Bestimme D_{jj} anhand folgender Fallunterscheidung:
   - Bei λ_j handelt es sich um einen reellen Eigenwert
   $$D_{jj} = \lambda_j$$
   - Bei λ_j handelt es sich um ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar $a_j \pm \mathrm{i} \cdot b_j$
   $$D_{jj} = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$$
5. Die Diagonalmatrix D hat die folgende Form
   $$D = \operatorname{diag}(D_{11}, D_{22}, \dots, D_{nn})$$

Beachte Reelle Eigenwerte λ_i mit einer algebraischen Vielfachheit $aV \geq 1$ müssen aV-mal in der Diagonalen notiert werden

7.3.1 Beispiel: Diagonalisierung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Eigenwerte von A:
   $$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -1 \qquad \text{mit alg. Vielf. je } 1$$
2. Überprüfe algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte:
   $$\begin{aligned} &\dim(E_4) = 1, \quad \dim(E_{-1}) = 1 \\ &\implies \forall \lambda_i : \text{ Alg. Vielf.} = \text{Geom. Vielf.} \\ &\implies A \text{ ist diagonalisierbar} \end{aligned}$$
3. Diagonalmatrix D_A:
   $$\underline{\underline{D_A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$

7.4 Transformationsmatrix orthogonal wählen

1. Die Matrix A sei gegeben
2. **Satz** Reelle, symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar und besitzen eine orthogonale Transformationsmatrix
3. Berechne die Eigenwerte von A
4. Bestimme die zu den Eigenwerten λ_i gehörenden Eigenvektoren $v^{(i)}$
5. Normiere die Eigenvektoren:
$$w^{(i)} = \frac{v^{(i)}}{\|v^{(i)}\|}$$
6. Die Transformationsmatrix T ist definiert als
$$T = \begin{pmatrix} w^{(1)} & w^{(2)} & \dots & w^{(n)} \end{pmatrix}$$
7. Überprüfe ob T orthogonal ist:
   (a) Ist A symmetrisch, so ist T orthogonal
   (b) Ist A nicht symmetrisch, so überprüfe ob T folgende Gleichung erfüllt:
$$T^T T = I_n$$

7.5 Spezialfall: Reelle, symmetrische Matrizen

Definition A ist symmetrisch $\iff A^T = A$

Wichtige Eigenschaften Falls A eine reelle, symmetrische Matrix ist, so gilt:

(i) Alle Eigenwerte sind reell

(ii) Die Eigenvektoren verschiedener Eigenwerte stehen senkrecht aufeinander

(iii) A ist diagonalisierbar

(iv) Es existiert ein orthogonales T, so dass $D = T^T AT$ gilt

8 Anwendung des Eigenwertproblems

8.1 Matrixpotenz berechnen

1. Sei A gegeben und A^n gesucht
2. Berechne die Eigenwerte von A
3. Bestimme die zu den Eigenwerten λ_i gehörenden Eigenvektoren $v^{(i)}$
4. Definiere die Diagonalmatrix D durch die Diagonalisierung von A (siehe Seite 14)
5. **Wichtig:** Berechne D^n und analysiere, ob aus $A = T \cdot D \cdot T^-1$ die Lösung von A^n gefolgert werden kann

   Beispiel Sei $D^n = -D \implies A^n = -T \cdot D \cdot T^{-1} = \underline{\underline{-A}}$
6. Definiere die Transformationsmatrix T wie folgt (Eigenvektoren sind Spalten von T):
$$T = \begin{pmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} & \dots & v^{(n)} \end{pmatrix}$$
7. Berechne T^{-1}
8. Berechne $A^n = T \cdot D^n \cdot T^{-1}$ mit
$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

8.1.1 Potenzen der imaginären Einheit

$$\mathrm{i}^{4n} = 1 \qquad \mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i} \qquad \mathrm{i}^{4n+2} = -1 \qquad \mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i}$$

8.2 Lineare Differentialgleichungen 1. oder 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Allgemeine Lösung und Anfangswertproblem

Sei $\dot{y}(t) = Ay(t)$ (lineare DGL 1. Ordnung) oder $\ddot{y}(t) = Ay(t)$ (lineare DGL 2. Ordnung) gegeben.

1. Berechne Eigenwerte von A
2. Berechne die zu den Eigenwerten λ_i gehörenden Eigenvektoren $v^{(i)}$
3. Definiere die Diagonalmatrix D durch die Diagonalisierung von A (siehe Seite 14)
4. Definiere die Transformationsmatrix T wie folgt (Eigenvektoren sind Spalten von T):

$$T = \begin{pmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} & \dots & v^{(n)} \end{pmatrix}$$

   Kontrolle Die Position der Spaltenvektoren in T sollten mit der Position der dazugehörigen Eigenwerte in D übereinstimmen

5. Fallunterscheidung:
   - **DGL 1. Ordnung**: Schreibe $\dot{x}(t) = Dx(t)$ auf, und löse die einzelnen DGLs:

$$\dot{x}_i(t) = \omega_i \cdot x_i(t)$$
$$\implies x_i(t) = a \cdot e^{\omega_i \cdot t}$$

   - **DGL 2. Ordnung**: Schreibe $\ddot{x}(t) = Dx(t)$ auf, und löse die einzelnen DGLs:

$$\ddot{x}_i(t) = -\omega_i^2 \cdot x_i(t)$$
$$\implies x_i(t) = a_i \cdot \cos(\sqrt{\omega_i} \cdot t) + b_i \cdot \sin(\sqrt{\omega_i} \cdot t)$$

6. Fallunterscheidung:
   - Die **allgemeine Lösung** berechnet sich durch $y(t) = Tx(t)$ und hat die Form

$$y(t) = Tx(t) = x_1(t) \cdot v^{(1)} + x_2(t) \cdot v^{(2)} + \dots + x_n(t) \cdot v^{(n)}$$

   - **Anfangsbedingungen** $y(0), \dot{y}(0), \dots$ sind gegeben:
     (a) Werte $x(0)$ aus. Ausgewertet sollte $x(0)$ nur aus Konstanten bestehen
     (b) Transformiere die Anfangswerte: $y(0) = Tx(0)$
     (c) Bestimme die Konstanten a_i, b_i
     (d) Die Lösung berechnet sich durch $y(t) = Tx(t)$ und hat die Form

$$y(t) = x_1(t) \cdot v^{(1)} + x_2(t) \cdot v^{(2)} + \dots + x_n(t) \cdot v^{(n)}$$

8.2.1 Beispiel: Lösung eines Anfangswertproblems 2. Ordnung

In Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Lösung zum folgenden Anfangswertproblem zu bestimmen:

$$\ddot{y}(t) = Ay(t) \qquad A = \begin{pmatrix} 11 & -15 \\ 20 & -24 \end{pmatrix}$$
$$y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \dot{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

1. Eigenwerte von A:

$$\lambda_1 = -4 \qquad \lambda_2 = -9$$

2. Eigenvektoren von A:

$$\lambda_1 \implies v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_2 \implies v^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. Diagonalmatrix D:

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

4. Transformationsmatrix T:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. DGLs 2. Ordnung lösen:

$$\ddot{x}(t) = Dx(t) \iff \begin{array}{rcccc} \ddot{x}_1(t) & = & (-4)x_1(t) & + & 0 \cdot x_2(t) \\ \ddot{x}_2(t) & = & 0 \cdot x_1(t) & + & (-9)x_2(t) \end{array}$$
$$\implies \begin{array}{rcccc} x_1(t) & = & a_1 \cos(2t) & + & b_1 \sin(2t) \\ x_2(t) & = & a_2 \cos(3t) & + & b_2 \sin(3t) \end{array}$$

6. $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ auswerten:

$$x(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 2b_1 \\ 3b_2 \end{pmatrix}$$

7. Anfangswerte transformieren:

$$y(0) = Tx(0) \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \implies a_1 = 2 \qquad a_2 = 0$$
$$\dot{y}(0) = T\dot{x}(0) \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2b_1 \\ 3b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \implies b_2 = \frac{\alpha}{3} \qquad b_1 = -\frac{3\alpha}{2}$$

Fortsetzung Beispiel: Lösung eines Anfangwertsproblems 2. Ordnung

8. Die Lösung für $a_1 = 2, a_2 = 0, b_1 = \frac{\alpha}{2}, b_2 = -\frac{\alpha}{2}$ lautet:

$$y(t) = Tx(t) = (a_1 \cos(2t) + b_1 \sin(2t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a_2 \cos(3t) + b_2 \sin(3t)) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \underline{\underline{y(t) = (2\cos(2t) - \frac{\alpha}{2}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{2} \sin(3t) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}}$$

9 Normalformen

9.1 Reelle Normalform $\tilde{D}$ einer quadratischen Matrix bestimmen

Es wird stehts eine Diagonalisierung wie auf Seite 14 beschrieben ist durchgeführt.

Wichtig Schreibe eine Begründung, warum A diagonalisierbar ist wenn $\tilde{D}$ mit der Methode aus Seite 14 *direkt* berechnet wird.

9.1.1 Beispiel: Reelle Normalform bestimmen

Bestimme die relle Normalform von A

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Eigenwerte berechnen:

$$\lambda^2 + 9 \overset{!}{=} 0 \iff \lambda_{1,2} = \pm 3i$$

2. Es handelt sich um ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar:

$$\underline{\underline{\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}}}$$

9.2 Reelle Transformationsmatrix $\tilde{T}$ einer quadratischen Matrix bestimmen

1. Sei A gegeben
2. Berechne die Eigenwerte von A
3. Bestimme die Eigenvektoren $v^{(i)}$ von A
4. Bestimme die Spaltenvektoren $\tilde{t}^{(i)} = v^{(i)}$ der Transformationsmatrix $\tilde{T}$.

   Beachte bezüglich Eigenvektoren komplexer Eigenwerte Sei λ ein komplexer Eigenwert und $v^{(1)}$ der dazugehörige Eigenvektor; dann gilt:

$$\tilde{t}^{(1)} = \mathrm{Re}(v^(1)) \qquad \tilde{t}^{(2)} = \mathrm{Im}(v^(1))$$

5. $\tilde{T} = \begin{pmatrix} \tilde{t}^{(1)} & \dots & \tilde{t}^{(n)} \end{pmatrix}$

9.3 Singulärwertzerlegung: Normalform einer allgemeinen $m \times n$ Matrix

1. Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei gegeben
2. Berechne K:

$$K = \begin{cases} A^T A \text{ , falls } m \geq n \\ AA^T \text{ , falls } m \leq n \end{cases}$$

3. Berechne die Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren $v^{(i)}$ von K
4. $V = \begin{pmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} & \dots & v^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
5. $U = \begin{pmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} & \dots & u^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit $u^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot A \cdot v^{(i)}$
6. Bestimme $\tilde{S}$:

$$\tilde{S} = \mathrm{diag}(s_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \ s_p = \sqrt{\lambda_p}) \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad p = \min(m, n)$$

   $s_i > 0$ sind die Singulärwerte

Fortsetzung Singulärwertzerlegung

7. S hat Diagonalgestalt, d.h.

$$S = \begin{cases} \begin{pmatrix} \tilde{S} \\ \hline 0 \end{pmatrix} & \text{, falls } m \geq n \\ \\ \begin{pmatrix} \tilde{S} \mid 0 \end{pmatrix} & \text{, falls } m \leq n \end{cases}$$

8. Es gilt: $A = U \cdot S \cdot V^T$

9.3.1 Kern, Basis von Kern, Bild und Basis des Bildes und Rang der Matrix $A = U \cdot S \cdot V^T$ bestimmen

1. Die Matrizen U, S, V sind gegeben, so dass $A = U \cdot S \cdot V^T$
2. Berechne die Singulärwerte
3. Die Anzahl Singulärwerte entspricht dem **Rang der Matrix** A: $r = \text{rang}(A)$
4. **Kern**:
   (a) $\ker(A) = \text{span}\{v^{(r+1)}, \ldots, v^{(n)}\}$ wobei $v^{(i)}$ der i-te Spaltenvektor von V ist
   (b) $v^{(r+1)}, \ldots, v^{(n)}$ ist **Basis von** $\ker(A)$
5. **Bild**:
   (a) $\text{im}(A) = \text{span}\{u^{(1)}, \ldots, u^{(r)}\}$ wobei $u^{(i)}$ der i-te Spaltenvektor von U ist
   (b) $u^{(r+1)}, \ldots, u^{(n)}$ ist **Basis von** $\text{im}(A)$

10 MATLAB Befehle

Determinante	$\mathrm{d = det(A);}$
Eigenwerte (T = Transf., D = Diag.)	$\mathrm{[T, D] = eig(A);}$
Singulärwerte	$\mathrm{[U, S, V] = svd(A);}$
QR-Zerlegung	$\mathrm{[Q, R] = qr(A);}$
Inverse	$\mathrm{i = inv(A);}$
Transponierte	$\mathrm{t = A'}$
n-Norm	$\mathrm{norm(A, n)}$ mit n entweder $1, 2$ oder inf
Zugriff auf 1. Matrixspalte	$A = [1, 2; 3, 4]; s = A(:, 1)$
Zugriff auf 2. Matrixzeile	$A = [1, 2; 3, 4]; z = A(2, :)$

10.1 Orthonormale Basis anhand QR-Zerlegung

$$\begin{aligned} \mathrm{[q, r]} &= \mathrm{qr([2, 0; 0, 3; -7, 0]);} \\ \mathrm{q_1} &= \mathrm{q(:, 1);} \\ \mathrm{q_2} &= \mathrm{q(:, 2);} \\ \mathrm{q_3} &= \mathrm{q(:, 3);} \end{aligned}$$

10.1.1 Fehlergleichungen mit QR-Zerlegung lösen

Seien A und c gegeben. Der Befehl um die Fehlergleichungen $Ax - c = r$ zu lösen lautet

$$\begin{aligned} \mathrm{[Q, R]} &= \mathrm{qr(A);} \\ \mathrm{x} &= \mathrm{R \backslash (Q' * c)} \end{aligned}$$

Bestimme Basen von Kern und Bild von A:

$$A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kern: suche x s.d. $Ax = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$dim(Kern(A)) = 4 - 2 = 2$
Wähle freie Parameter wo es keine Pivots hat:

$$\Rightarrow x_4 = \alpha, x_3 = \beta$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\beta \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{4}\beta$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

Diese Lösung kann auch so dargestellt werden:

$$\alpha\begin{pmatrix}-3/4\\3/2\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1/4\\-3/2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Basis_{Kern}=\{\begin{pmatrix}-3\\6\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-6\\4\\0\end{pmatrix}\}$$

Bild $= span\{a^{(1)},\dots,a^{(2)}\}$

Um die Basis des Bildraums zu finden: nehme die Ursprünglichen Vektoren der Pivot-Spalten, d.h:

$$\Rightarrow Basis_{Bild}=\{\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\}$$