Analysis Zusammenfassung

Herbstsemester 2011 / Frühjahrssemester 2012

Giuseppe Accaputo

Rechnergestütze Wissenschaften, B.Sc.

ETH Zürich

1 Komplexe Zahlen

1.1 Polardarstellung

(i) $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$

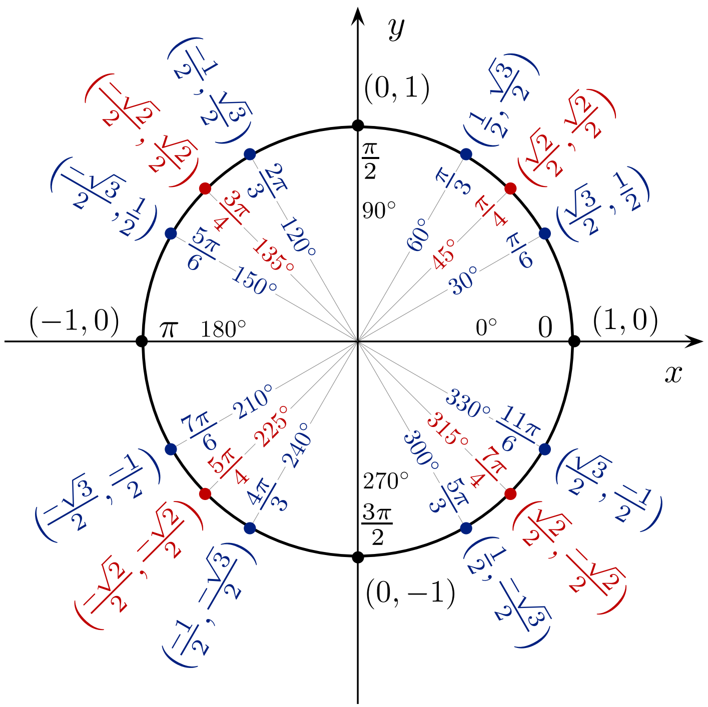
(ii) $\alpha = \mathrm{Arg}(z)$

(iii) $\cos(\alpha) = \dfrac{\mathrm{Re(z)}}{|z|}$

(iv) $\sin(\alpha) = \dfrac{\mathrm{Im(z)}}{|z|}$

(v) $z = |z| \cdot (\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)) = |z| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$

1.2 Winkel im Einheitskreis



1.3 n-te Wurzel

Die Gleichung

$$z^n = w \qquad z, w \in \mathbb{C}$$

besitzt genau n Lösungen:

$$z = \sqrt[n]{|w|} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{n} + \mathrm{i}\cdot\frac{2k\pi}{n}} \qquad k = 0, \dots, n-1$$

Beispiel Sei $w = 4 + \mathrm{i} \cdot 4\sqrt{3}$. Finde $z^3 = w$.

$$|w| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8 \implies \sqrt[3]{|w|} = 2$$

$$\cos(\phi) = \frac{1}{2}, \quad \sin(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\implies z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{9}} \quad z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{9}} \quad z_3 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{9}}$$

1.3.1 Ansatz mit $(a + \mathrm{i}b)^n$

$$z^n = w \iff w = (a + \mathrm{i}b)^n$$

Beispiel Sei $z^2 + 3 + \mathrm{i}4$; dann folgt

$$\begin{aligned} z^2 &= -3 - \mathrm{i}4 \\ &\iff (a + \mathrm{i}b)^2 = -3 - \mathrm{i}4 \\ &\iff a^2 + 2ab\mathrm{i} - b^2 = -3 - \mathrm{i}4 \\ &\implies \text{Gleichungssystem:} \end{aligned}$$

$$a^2 - b^2 = -3$$
$$2ab = -4$$

1.4 Rechenregeln

(i) $z_1 + z_2 = (x_{z_1} + x_{z_2}) + i \cdot (y_{z_1} + y_{z_2})$

(ii) $z_1 \cdot z_2 = (x_{z_1} \cdot x_{z_2}) - y_{z_1} \cdot y_{z_2} \cdot i \cdot (x_{z_1} \cdot y_{z_2} + x_{z_2} \cdot y_{z_1})$

(iii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(iv) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(v) $\overline{-z} = -\overline{z}$

(vi) $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$

(vii) $\overline{\overline{z}} = z$

(viii) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$

(ix) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2 \cdot i}$

(x) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

(xi) $|z|^2 = |\overline{z}|^2 = z\overline{z}$

(xii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(xiii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(xiv) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$

(xv) $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

1.5 Vollständige Induktion

Gegeben ist eine Aussage $A(n) \quad n \in \mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, dass $A(n) \forall \quad n \geq n_0$ gilt.

1. Induktionsverankerung: Überprüfe $A(n_0)$
2. Induktionsannahme: Nehme an $A(n)$ gilt
3. Induktionsschritt: Zeige $A(n) \implies A(n+1)$

1.5.1 Beispiel: Vollständige Induktion

Zeige:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n$$

1. Induktionsverankerung:

$$k = 1 : \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} \qquad \checkmark$$

2. Induktionsannahme:

$$\sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &\overset{\text{(Ind.Ann.)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \text{Q.E.D}\end{aligned}$$

2 Folgen

2.1 Folge

Sei eine Menge X gegeben. Die Funktion $f : \mathbb{N} \to X$ wird *Folge* genannt.

Notation Es gilt: $x_n = f(n)$, wobei (x_n) die Folge ist

2.2 Abstandsfunktion (Metrik)

Sei X eine beliebige Menge. Die Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^+$$

heisst *Metrik auf* X, wenn für beliebige Elemente $x, y, z \in X$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung)

2.3 Konvergenz

Die Folge (x_n) konvergiert gegen x falls

$$\forall \varepsilon_0 > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :$$

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

Beispiel Zeige $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert.

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon_0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \frac{1}{n_0} < \varepsilon \\ &\implies \forall n \geq n_0 : \quad d(\frac{1}{n}, 0) = \left|\frac{1}{n}\right| \\ &\implies \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \\ &\implies \left|\frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n_0}\right| < \varepsilon \qquad \text{Q.E.D}\end{aligned}$$

2.3.1 Praktische Regeln zu Grenzwerten

Die untenstehenden Regeln gelten wenn folgende Grenzwerte existieren

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y$

(iii) $x \neq 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = x$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$

(v) $x_n \leq y_n \implies x \leq y$

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$
$\implies \lim\limits_{n\to\infty} c_n = x$ (Sandwich-Kriterium)

(vii) Sei f stetig $\implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$

2.3.2 Tricks um Grenzwerte zu bestimmen

Grösste Potenz ausklammern Bei Brüchen bestehend aus Polynomen, klammere die grösste Potenz im Bruch im Zähler sowie im Nenner aus:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+2}{4-5n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(4+\frac{2}{n^2})}{n^2(\frac{4}{n^2}-5)} = \underline{\underline{-\frac{4}{5}}}$$

Wurzeltrick Sind Wurzelterme vorhanden, so bilde einen Bruch mit der Summe (falls Differenz) oder Differenz (falls Summe) der Wurzelterme:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2-(n+3)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}} = \underline{\underline{0}}$$

Funktionen der Form x^x Verwende exp und log um den Grenzwert von Funktionen der Form x^x zu bestimmen:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log(n)}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n)}{n}} \overset{\text{(L'Hô.)}}{=} e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \underline{\underline{1}}$$

Erweiterte Multiplikationsregel Der Grenzwert $\lim_{x\to k} f(x) \cdot g(x)$ darf aufgeteilt werden in $\lim_{x\to k} f(x) \cdot \lim_{x\to k} g(x)$ wenn mindestens einer der beiden Grenzwerte existiert.

Im folgenden sei $\lim_{x\to k} f(x) = \infty, \lim_{x\to k} g(x) = a$; dann gilt für $\lim_{x\to k} f(x)\cdot g(x)$:

$\boldsymbol{a < 0}$: $\infty \cdot a = -\infty$

$\boldsymbol{a > 0}$: $\infty \cdot a = \infty$

$\boldsymbol{a = 0}$: $\infty \cdot 0 \neq 0 \implies$ Siehe Grenzwerte der Form $\infty \cdot 0$

Beispiel: $\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\log(x)}{x}-1\right) = \lim_{x\to\infty} x \cdot \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log(x)}{x}-1\right) = \infty\cdot -1 = \underline{\underline{-\infty}}$

Fortsetzung Tricks um Grenzwerte zu bestimmen

Grenzwerte der Form $\boldsymbol{0\cdot\cos(\infty), 0\cdot\sin(\infty)}$ cos, sin sind beschränkt, daher ergeben Grenzwerte der Form $0\cdot\sin(\infty), 0\cdot\cos(\infty)$ immer 0

Beispiel: $\lim_{x\to 0} x\cdot\sin(\frac{1}{x}) = 0\cdot\sin(\infty) = 0$, da sin beschränkt ist.

Grenzwerte der Form $\boldsymbol{\lim_{x\to 0,\infty} f(x)\cdot g(x) = 0\cdot\infty}$ oder $\boldsymbol{\lim_{x\to 0,\infty} f(x)\pm g(x) = 0\pm\infty}$

$\boldsymbol{x\to\infty}$: Sei $\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) = 0\cdot\infty$; dann können wir den Grenzwert umschreiben als $\lim_{t\to 0} f(\frac{1}{t})\cdot g(\frac{1}{t})$

$\boldsymbol{x\to 0}$: Sei $\lim_{x\to 0} f(x)\cdot g(x) = 0\cdot\infty$; dann können wir den Grenzwert umschreiben als $\lim_{t\to\infty} f(\frac{1}{t})\cdot g(\frac{1}{t})$

Beispiel: $\lim_{n\to 0+} x^x \iff \lim_{n\to 0+} e^{x\log(x)} \iff \lim_{t\to\infty} e^{\frac{\log(\frac{1}{t})}{t}}$

Grenzwertdefinition von e

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = (\frac{1}{n}+1)^n \quad n\in\mathbb{N}, n>0$$

$$e = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}+1)^n$$

Driton'sches Lemma Seien (f_n) und (g_n) Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} (f_n) = \infty \qquad \lim_{n\to-\infty} (g_n) = -\infty$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} (f_n)\cdot(g_n) = -\infty$$

2.4 Beschränktheit

(x_n) heisst beschränkt, falls

$$\exists c>0 \text{ so dass } |x_n| \leq c \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

2.4.1 Monotonie

(x_n) heisst

- monoton fallend $\iff \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1 \quad \forall n$
- monoton wachsend $\iff \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \quad \forall n$

Monotonie eines Quotienten Sei $f(x) = \frac{1}{g(x)}$; dann gilt:

$g(x)$ ist eine monoton steigende (bzw. monoton fallende) Funktion $\implies f(x)$ ist eine monoton fallende (bzw. monoton steigende) Funktion

Monotonie differenzierbarer reeller Funktionen Sei f eine auf dem Intervall $[a,b]$ stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktion; dann gilt:

f ist monoton wachsend (bzw. monoton fallend)

$\iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ ist nirgendwo negativ (bzw. nirgendwo positiv)

2.4.2 Sätze zu Monotonie und Beschränktheit

$\boldsymbol{x_n}$ beschränkt

(x_n) konvergiert $\implies (x_n)$ beschränkt

(x_n) unbeschränkt $\implies (x_n)$ konvergiert nicht

$\boldsymbol{x_n}$ monoton und beschränkt

(x_n) monoton und beschränkt $\implies (x_n)$ konvergiert

2.5 Teilfolgen

Sei (x_n) eine Folge.

$$(x_{n_k}) \text{ mit } n_{k+1} > n_k \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

heisst *Teilfolge* von (x_n).

2.5.1 Konvergenz

Sei x der Grenzwert von (x_n); dann gilt

$(x_n) \longrightarrow x \implies (x_{n_k}) \longrightarrow x \quad \forall$ Teilfolgen

$(x_{n_a}) \longrightarrow a,\ (x_{n_a}) \longrightarrow b, a\neq b \implies (x_n)$ konvergiert nicht

2.5.2 Folgen in $\mathbb{R}$

Jede Folge in $\mathbb{R}$ hat eine *monotone* Teilfolge.

2.6 Häufungspunkt

$x \in X$ ist *Häufungspunkt* wenn gilt

(i) $\forall \varepsilon\ \forall N \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N$ so dass

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

(ii) $B_\varepsilon(x)$ enthält unendlich viele Elemente der Folge (x_n)

(iii) x ist Häufungspunkt von $(x_n) \implies \exists$ Teilfolge von (x_n) die gegen x konvergiert

Beispiel Bestimme die Häufungspunkt von $\sin(\frac{\pi n}{2} \cdot \frac{n}{n+1}$ Fallungerscheidung:

1. $(x_n)_{n=1,5,9,\ldots} = \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\overset{n\longrightarrow\infty}{\Longrightarrow}}$

2. $(x_n)_{n=3,7,11,\ldots} = \underbrace{\sin(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k)}_{=-1} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\overset{n\longrightarrow\infty}{\Longrightarrow}}$

3. $(x_n)_{n=2,4,6,\ldots} = \sin(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k) \cdot \frac{n}{n+1} = 0$

$\implies$ $\underline{\underline{\text{Häufungspunkte von } (x_n) = \{-1, 0, 1\}}}$

2.7 Cauchy-Folge

(x_n) ist eine *Cauchy-Folge* falls $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n, m \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0$ gilt

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

2.7.1 Satz zur Konvergenz

(x_n) konvergiert $\implies$ (x_n) ist eine Cauchy-Folge

2.7.2 Konvergenz in vollständigen Räumen

Für vollständige Räume (z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$, nicht aber $\mathbb{Q}$) gilt:

Alle Cauchy-Folgen konvergieren

3 Reihen

3.1 Folge der Partialsummen

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$; dann ist

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

und (s_n) ist die *Folge von Partialsummen*

Notation $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$

3.2 Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ \textit{konvergiert} falls } (s_n) \text{ konvergiert}$$

3.3 Absolute Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ \textit{konvergiert absolut} falls } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergiert}$$

3.4 Praktische Regeln

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\implies \displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ (a_k ist eine Nullfolge)

2. a_k ist keine Nullfolge $\implies \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert nicht

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergieren $\implies \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

4. $\lambda \in \mathbb{C} : \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

3.5 Wichtige Reihen

3.5.1 Alternierende Reihe

Sei a_k eine monoton fallende Folge; dann konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

3.5.2 Reihe der Form $\boldsymbol{\frac{1}{k^s}}$

Für ein $s \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad \begin{cases} \text{konvergiert,} & \text{falls } s > 1 \\ \text{divergiert,} & \text{falls } s \leq 1 \end{cases}$$

$s = 1$ ist die *harmonische Reihe*.

3.5.3 Geometrische Reihe

Die *geometrische Reihe* konvergiert für $|z| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad z \in \mathbb{C}$$

3.6 Konvergenzkriterien

3.6.1 Nullfolge

Sei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine Reihe, die auf Konvergenz geprüft werden sollte; dann gilt:

$$b_n \text{ ist keine Nullfolge} \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergiert nicht}$$

3.6.2 Majorantenkriterium

Sei $b_n \in \mathbb{R}^+$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine *konvergente* Reihe; dann gilt

$$\text{Falls } \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ |a_n| \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

3.6.3 Minorantenkriterium

Sei $b_n \in \mathbb{R}^+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine *divergente* Reihe; dann gilt

$$\text{Falls } \exists n_0 \in \mathbb{N}: \; a_n \geq b_n \geq 0 \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

3.6.4 Leibnizkriterium

$$(a_n) \text{ ist eine } \underbrace{\text{positive,}}_{a_n \in \mathbb{R}^+} \overbrace{\text{monoton fallende}}^{a_{n+1} < a_n \;\; \forall n} \underbrace{\text{Nullfolge}}_{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ konvergiert}$$

3.6.5 Cauchy-Kriterium

Folgendes Kriterium gilt nur für vollständige Räume (z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$, nicht aber $\mathbb{Q}$):

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ konvergiert} \Longleftrightarrow (s_n) \text{ ist eine Cauchy-Folge}$$

3.6.6 Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q \quad \begin{cases} |q| < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \\ |q| > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \\ |q| = 1 \implies \text{Keine Aussage möglich} \end{cases}$$

3.6.7 Wurzelkriterium

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \quad \begin{cases} |q| < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \\ |q| > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \\ |q| = 1 \implies \text{Keine Aussage möglich} \end{cases}$$

3.6.8 Tipps: Konvergenz von Reihen

- Halte Ausschau nach $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n^2}$ indem man versucht, im Zähler sowie im Nenner die grösste Potenz auszuklammern.
- $\frac{1}{n} \cdot a_n$: Versuche a_n abzuschätzen, sodass divergierende Minorante wird
- Aufgabe 11 aus Blatt von Thomas
- Bei Fakultät und Potenzen meistens Quotientenkriterium verwenden
- $\sin(\frac{1}{n})$ verhaltet sich wie $\frac{1}{n}$ für $n \to \infty$

3.6.9 Beispiel: Abschätzung einer Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-\sqrt{k}}{(k+\sqrt{k})^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2} \cdot \frac{1-1/\sqrt{k}}{(1+1/\sqrt{k})^2}$$

$$\text{Es gilt } \lim_{k\to\infty} \frac{1-1/\sqrt{k}}{(1+1/\sqrt{k})^2} = 1$$

Aus diesem Grunde wird folgende Behauptung aufgestellt:

$$\text{Beh.: } \exists k_0 \text{ s.d. } \forall k \geq k_0 : \frac{1-1/\sqrt{k}}{(1+1/\sqrt{k})^2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Beweis: } 1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{k} + \frac{2}{\sqrt{k}}\right) \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2k} + \frac{2}{\sqrt{k}}$$

$$\Longrightarrow \text{Ab } k = 10 \text{ ist die Ungleichung erfüllt}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1-1/\sqrt{k}}{(1+1/\sqrt{k})^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} \cdot \frac{1-1/\sqrt{k}}{(1+1/\sqrt{k})^2} + \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \underbrace{\frac{1-1/\sqrt{k}}{(1+1/\sqrt{k})^2}}_{\geq 1/2}$$

$$\geq C + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$\Longrightarrow \text{Wir haben eine divergierende Minorante gefunden}$$

3.7 Potenzreihen

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$; dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

eine *Potenzreihe*

3.7.1 Konvergenzradius

Der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ist definiert als

$$R = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{(Cauchy-Hadamard)}$$

Falls $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ existiert, dann gilt

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \text{(Euler)}$$

3.7.2 Konvergenz von Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \begin{cases} |z| < R \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert} \\ |z| > R \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \text{ divergiert} \\ |z| = R \implies \text{Beides kann passieren} \end{cases}$$

3.7.3 Verhalten am Rand des Konvergenzradius

Sei der Konvergenzradius $R > 0$ der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ gegeben. Falls gefragt wird, wie sich die Reihe am Rand des Konvergenzkreises verhaltet, so sollte man $z = -R$ und $z = R$ auf Konvergenz überprüfen, da $R = |\varrho|$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (-1)^n \cdot R^n$$

$$\Longrightarrow \text{Leibnizkriterium verwenden}$$

Tipp Überprüfe als erstes gleich, ob a_n eine Nullfolge ist.

3.8 Riemannscher Umordnungssatz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ darf umgeordnet werden}$$

4 Stetige Funktionen

Für dieses Kapitel sei f definiert als

$$f: \underbrace{X}_{\text{Definitionsbereich}} \rightarrow \overbrace{Y}^{\text{Bildbereich}}$$

4.1 Eigenschaften von Funktionen

4.1.1 Injektivität

$\forall x_1, x_2 \in X$ gilt:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Jedes Element der Zielmenge wird höchstens einmal als Funktionswert angenommen.

4.1.2 Surjektivität

$$\forall y \in Y : existsx \in X : f(x) = y$$

Jedes Element der Zielmenge wird mindestens einmal als Funktionswert angenommen.

4.1.3 Bijektivität

$$f \text{ ist bijektiv} \iff f \text{ ist surjektiv und injektiv}$$

Existenz der Umkehrfunktion

$$f \text{ ist bijektiv} \implies \exists f^{-1} : f^{-1}(y) = x \qquad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Kandidat für Umkehrfunktion überprüfen Sei f^{-1} ein Kandidat für die Umkehrfunktion von f. Sind die beiden Gleichungen $f(f^{-1}(y)) = y$ und $f^{-1}(f(x)) = x$ erfüllt, so ist f^{-1} die Umkehrfunktion von f

4.1.4 Beispiel von surjektiven und injektiven Funktionen

Sei $f(x) = x^2$; dann gilt:

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nicht injektiv $(x = -2)$ und nicht surjektiv $(y =)$
2. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ist nicht injektiv, aber surjektiv

4.2 Stetigkeit

Seien in diesem Unterkapitel $(X, d_X), (Y, d_Y)$ nun metrische Räume.

f heisst *stetig in* x_0 falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X$ gilt

$$d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Weiter heisst f *stetig* wenn f stetig in x_0 $\forall x_0 \in X$ ist.

Abhängigkeit von $\boldsymbol{\delta}$ δ ist in Abhängigkeit von ε und x_0 zu wählen:

$$\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$$

4.2.1 Gleichmässige Stetigkeit

f heisst *gleichmässig stetig* falls $\forall \varepsilon > 0$ so dass $\forall x, x_0 \in X$ gilt

$$d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Abhängigkeit von $\boldsymbol{\delta}$ δ ist nur in Abhängigkeit von ε zu wählen:

$$\delta = \delta(\varepsilon)$$

4.2.2 Lipschitz-Stetigkeit

f heisst *Lipschitz-stetig* falls $\exists L > 0$ so dass

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq L \cdot d_X(x, x_0) \qquad \forall x, x_0 \in X$$

4.2.3 Mächtigkeit der Stetigkeitsbegriffe

$$f \text{ ist Lipschitz-stetig} \implies f \text{ ist gleichmässig stetig} \implies f \text{ ist stetig}$$

4.2.4 Wichtige Regeln

Seien f, g stetige Funktionen

(i) $f \circ g$ ist stetig

(ii) $f + g,\ f \cdot g$ sind stetig

(iii) $|f|, \overline{f}, Re(f), Im(f)$ sind stetig

(iv) $\dfrac{f}{g}$ ist stetig $\forall x$ mit $g(x) \neq 0$

(v) Polynome sind motherfucking stetig

(vi) $\sqrt[k]{x}$ auf $\mathbb{R}^+$, $\exp(x)$ auf $\mathbb{R}, \log(x)$ auf $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \sin(x)$ auf $\mathbb{R}, \cos(x)$ auf $\mathbb{R}$ sind stetig

Schreibe immer: f ist stetig auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ als Komposition, Summe und Produkt stetiger Funktionen

4.3 Funktionenfolgen

4.3.1 Punktweise Konvergenz

Eine Funktionenfolge (f_n) *konvergiert punktweise gegen* f, falls $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq n_0$ gilt

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Abhängigkeit von $\boldsymbol{n_0}$ n_0 ist in Abhängigkeit von ε und x zu wählen:

$$n_0 = n_0(\varepsilon, x)$$

4.3.2 Gleichmässige Konvergenz

Eine Funktionenfolge (f_n) *konvergiert gleichmässig gegen* f, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq n_0 \forall x \in X$ gilt

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Abhängigkeit von $\boldsymbol{n_0}$ n_0 ist in Abhängigkeit von ε zu wählen:

$$n_0 = n_0(\varepsilon)$$

4.3.3 Gleichmässige Konvergenz und Stetigkeit

(f_n) konvergiert gleichmässig gegen f und f_n ist stetig $\forall n \implies$ f ist stetig

4.3.4 Funktionenfolge auf Konvergenz überprüfen

Sei $f_n(x)$ gegeben. Zu zeigen sei die punktweise sowie gleichmässige Konvergenz von $f_n(x)$

1. Punktweise Konvergenz: f_n konvergiert punktweise, wenn die Grenzfunktion $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existiert
2. Gleichmässige Konvergenz: Zeige $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

4.4 Beschränktheit

f heisst *beschränkt*, falls

$$\exists c > 0 \text{ so dass } |f(x)| < c \ \forall x \in X$$

4.4.1 Raum der beschränkten stetigen Funktionen

$\mathcal{C}(X)$ ist der Raum der beschränkten stetigen Funktionen f:

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C})$$

4.5 Zwischenwertsatz

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion, die auf einem Intervall definiert ist; dann gilt:

$$f(a) \le \gamma \le f(b) \implies \exists c \in [a, b] : \gamma = f(c)$$

Oder: Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert γ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an mindestens einer Stelle $c \in [a, b]$ an:

$$\gamma = f(c)$$

4.5.1 Beispiel: Anwendung Zwischenwertsatz

Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Man beweise, dass ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$ existiert.

Beweis. Man definiere $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$. Man möchte nun zeigen, dass ein c existiert, so dass $g(c) = 0$ ist und somit $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$ gilt.

$$g(0) = f(0) - f(\frac{1}{2}) \iff f(\frac{1}{2}) = f(0) - g(0) \qquad (\star)$$

$$g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(1) \overset{(\star)}{\implies} g(\frac{1}{2}) = f(0) - g(0) - f(1)$$

$$\iff g(\frac{1}{2}) = -g(0)$$

Dies bedeutet, dass die Funktion g die x-Achse schneidet (Stetigkeit), also einen Nullpunkt besitzt. Aus dem Zwischenwertsatz folgt nun, dass es ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ geben muss, so dass $g(c) = 0$ gilt. Die Aussage ist somit bewiesen.

4.6 Supremumsnorm

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| \qquad f \in \mathcal{C}(X)$$

5 Topologische Begriffe

5.1 Offener Ball

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

5.2 Offene Menge

$U \subset X$ ist offen

$\iff \forall x \in U : \exists \varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$

5.3 Abgeschlossene Menge

$A \subset X$ ist abgeschlossen

$\iff \forall x \in X \setminus A : \exists \varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$

5.3.1 Aussagen zu Folgen

A ist abgeschlossen $\iff X \setminus A$ ist offen

$\iff (x_n) \in A \ \forall n$

und $\lim_{n\to\infty} x_n = x \implies x \in A$

5.4 Kompaktheit

K ist kompakt $\iff$

Jede Folge (x_n) mit $(x_n) \in K \ \forall n$

hat eine in K konvergente Teilfolge

5.5 Aussagen zur Stetigkeit, abgeschlossene und offene Mengen

Sei $f : X \to Y$; dann gilt:

f ist stetig $\iff U \subset Y$ ist offen $\implies f^{-1}(U)$ ist offen

$\iff A \subset Y$ ist abgeschlossen $\implies f^{-1}(A)$ ist abg.

6 Vektorräume

6.1 Vektorraum

Sei K ein Körper. Eine Menge V zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + :\ & V \times V \to V, \quad (a, b) \mapsto a + b \\ \cdot :\ & K \times V \to V, \quad (\lambda, b) \mapsto \lambda \cdot b \end{aligned}$$

heisst K-*Vektorraum*, wenn gilt:

(i) $+$ ist *Assoziatv*; d.h. $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x, y, z \in V$

(ii) $+$ ist *Kommutativ*; d.h. $x + y = y + x \quad \forall x, y \in V$

(iii) $\exists$ *neutrales Element* 0_V (Nullvektor) bezüglich $+$; d.h. $0_V + v = v + 0_V = v \quad \forall v \in V$

(iv) $\exists$ *inverses Element* $-v$ bezüglich $+$; d.h. $v+(-v) = -v+(v) = 0 \quad \forall v \in V$

(v) $\cdot$ ist *assoziativ*; d.h. $\lambda\cdot(\mu\cdot v) = (\lambda\mu)\cdot v \quad \forall \lambda,\mu \in K \; \forall v \in V$

(vi) $\exists$ *Neutralelement* 1 (Einselement aus K) bezüglich $\cdot$; d.h. $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

(vii) Es gilt das *Distributivgesetz*; d.h. $\lambda \cdot (v+w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \quad \forall \lambda \in K \quad \forall v,w \in V$

6.2 Unterraum

Sei V ein reeller Vektorraum und $W \subset V$.

W heisst Unterraum von V, wenn gilt:

(i) $\vec{0} \in W$

(ii) $v, w \in W \implies v + w \in W$

(iii) $\lambda \in \mathbb{R}, v \in W \implies \lambda v \in W$

6.3 Basis

Eine endliche Basis von V ist eine endliche Folge von Vektoren $e_1, ..., e_n \in V$, so dass folgendes gilt:

(i) $e_1, ..., e_n \in V$ sind linear unabhängig:

$$\forall \lambda_i \in \mathbb{R} : \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0 \implies \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$$

(ii) Jeder Vektor in V lässt sich durch eine eindeutige Linearkombination der Basisvektoren bilden:

$$\forall v \in V : v = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$$

6.3.1 Orthonormalbasis

Eine Orthonormalbasis erfüllt folgende Eigenschaften:

(i) Die Basisvektoren sind paarweise orthogonal:

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \qquad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\} \text{ mit } i \neq j$$

(ii) Jeder Basisvektor hat die Norm eins:

$$\|e_i\| = \sqrt{\langle e_i, e_i \rangle} = 1 \qquad \forall i \in \{1,\ldots,n\}$$

Bemerkung: Jeder endlich dimensionale Vektorraum mit innerem Produkt besitzt eine Othonormalbasis.

6.3.2 Orthogonalbasis

Eine Orthonormalbasis erfüllt nur folgende Eigenschaften:

(i) Die Basisvektoren sind paarweise orthogonal:

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \qquad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\} \text{ mit } i \neq j$$

6.4 Linearität

Seien V, W reelle Vektorräume.

Eine Abbildung $\Phi : V \longrightarrow W$ heisst dann linear, wenn folgendes $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (v_i)_{i \in \mathbb{N}} \in V$ gilt:

(i) $\Phi(v_1 + v_2) = \Phi(v_1) + \Phi(v_2)$

(ii) $\Phi(\lambda v_1) = \lambda \cdot \Phi(v_1)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

6.5 Vektornorm

Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Norm(funktion) auf V ist eine Abbildung

$$V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \mapsto \|v\|$$

die einem Vektor eine Zahl zuordnet, nämlich dessen Länge.

Es gelten folgende Eigenschaften:

(i) $\|v\| \geq 0$

(ii) $\|v\| = 0 \implies \vec{v} = \vec{0}$

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V : \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

(iv) $\triangle$-Ungleichung: $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Bemerkung: (Betrag eines Vektors) $|a| = \|a\|$ mit $a \in V$

6.5.1 Normen

Summennorm $\|\boldsymbol{x}\|_1$: $\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|$

Euklidische Norm $\|\boldsymbol{x}\|_2$: $\displaystyle\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$

Maximumnorm $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$: $\displaystyle\max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$

p-Norm $\|\boldsymbol{x}\|_p$: $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$

6.6 Skalarprodukt (Innere Produkt)

Sei V ein reeller Vektorraum. Das innere Produkt ist eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

Für einen reellen Vektorraum V und $x, y, z \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt das innere Produkt folgende Eigenschaften:

1. Bilinearität:
   (i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
   (ii) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
   (iii) $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$
2. Symmetrie:
   (i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. Positive Definitheit:
   (i) $\langle x, x \rangle \geq 0$
   (ii) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bemerkung: Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist das innere Produkt gegeben durch das Skalarprodukt.

6.6.1 Skalarprodukt im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $a \cdot b$ mit $a, b \in V$ ist wie folgt definiert:

$$a \cdot b = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\varphi \text{ mit } 0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$$
$$\varphi = \arccos\left(\frac{a \cdot b}{\|a\| \, \|b\|}\right)$$

Weiter gilt:

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a} \text{ mit } a \in V$$

6.6.2 Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = \|\vec{a}\|^2$$

6.6.3 Orthogonale Vektoren

Seien $\vec{a}, \vec{b}$ verschieden von $\vec{0}$. Dann gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

6.7 Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

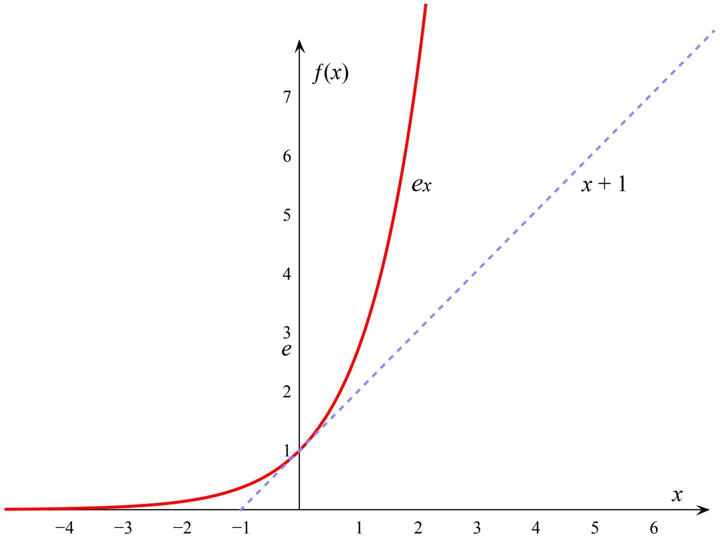
6.7.1 Betrag des Vektorprodukts

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\theta$$

$\theta \in [0, \pi] \implies \sin\theta \geq 0$

7 Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$



7.1 Potenzreihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

7.2 Stetigkeit

exp ist stetig in ganz $\mathbb{R}$ sowie $\mathbb{C}$

7.3 Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x$$

7.4 Rechenregeln

(i) $\mathrm{e}^0 = 1$

(ii) $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z + \mathrm{e}^w$

7.5 Konvergenzverhalten

exp konvergiert *schneller* gegen einen Wert als Polynome z^n (mit $n \neq z$): $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{z^n}{e^z} = 0$

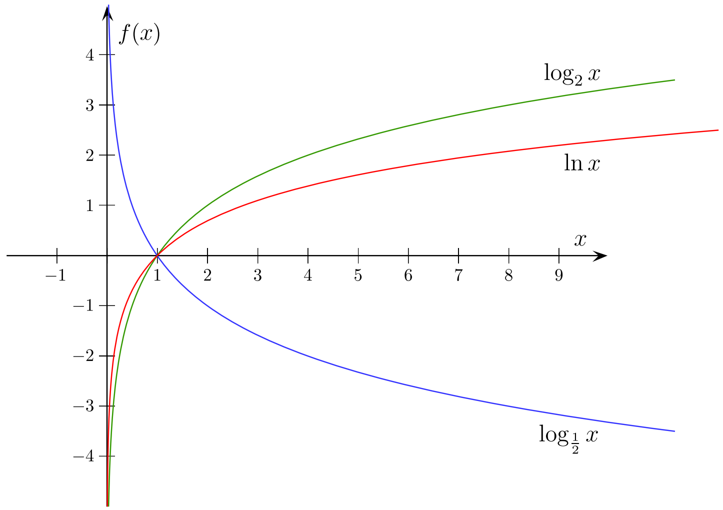
7.6 Nützliche Grenzwerte

(i) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{e^z - 1}{z} = 1$

(ii) $\exp(1) = \mathrm{e} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n} + 1\right)^n$

8 Logarithmus

$$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$
$$\log = \exp^{-1}$$



8.1 Potenzreihe

$$\log(1 + x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{k+1}}{k+1}$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots \quad \text{für} \quad -1 < x \leq 1$$

Wichtig Die Reihenentwicklung von $\log(x)$ ist wie folgt definiert:

$$\log(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots$$

8.2 Rechenregeln

(i) $\log(1) = 0$

(ii) $x = \mathrm{e}^{\log(x)}$

(iii) $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

(iv) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

(v) $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$

(vi) $\log(x+y) = \log x + \log\left(1 + \frac{y}{x}\right)$.

8.3 Konvergenzverhalten

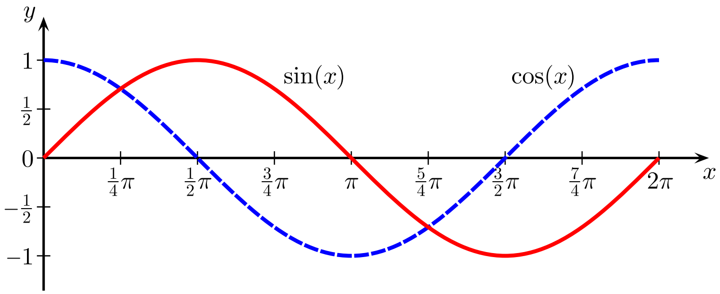
$\log$ konvergiert *wesentlich langsamer* gegen einen Wert als jegliche andere Funktionen: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{\sqrt[n]{x}} = 0$

9 Trigonometrische Funktionen

$$\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{\mathrm{i}x}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

$$\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}x}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$



9.1 Potenzreihen

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$$

9.2 Nützliche Eigenschaften

(i) $\cos(x) = \cos(-x)$ (Gerade Funktion)

(ii) $\sin(x) = -\sin(x)$ (Ungerade Funktion)

(iii) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

(iv) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

(v) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$

(vi) $\sin(\frac{\pi}{2} = \cos(x)$

(vii) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

(viii) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

(ix) $\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$

(x) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$= 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

(xi) $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$

(xii) $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

(xiii) $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

10 Hyperbolische Funktionen

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

10.1 Potenzreihen

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\tanh(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

11 Differentialrechnung

11.1 Differentialquotient

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heisst *differenzierbar* an der Stelle $x_0 \in U$ falls folgender Grenzwert existiert:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

11.2 Ableitungsregeln

Seien $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reellwertige, hinreichend oft differenzierbare Funktionen und $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante; dann gelten folgende Regeln:

Ableitung einer Konstanten:	$(a)' = 0$
Konstanter Vorfaktor:	$(a \cdot u)' = au'$
Summenregel:	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
Produktregel:	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Quotientenregel:	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Kettenregel:	$(u \circ v)'(x) = u'(v(x))v'(x)$
logarithmische Ableitung:	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
Umkehrregel	$(u^{-1})'(u(x_0)) = \frac{1}{u'(x_0)}$

11.3 Ableitungen elementarer Funktionen

Funktion	Ableitung
x^n	nx^{n-1}
$a \cdot x^n + b$	$a \cdot n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
a^x $(a > 0; a \neq 1)$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$ $f''(x) = a^x \cdot \ln a \cdot \ln a$
$\ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$
$\log_a(x)$ $(a > 0; a \neq 1; x > 0)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2 \cdot \ln a}$
$\arcsin(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $f''(x) = \frac{-x}{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

11.4 Extrema

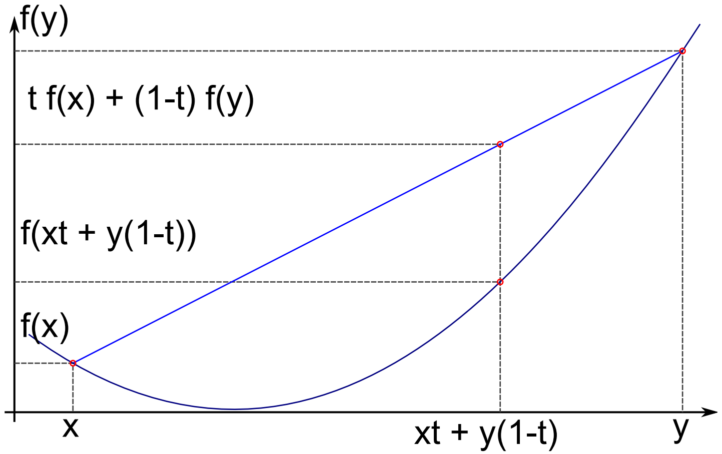
$$x_0 \text{ ist ein Extremum von } f \iff f'(x_0) = 0$$

11.4.1 Konvex

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst *konvex* wenn $\forall x, y \in I$ und $t \in [0,1]$ gilt:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Weiter gilt: f ist konvex $\iff f''(x) \geq 0$



11.4.2 Konkav

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst *konkav* wenn $\forall x, y \in I$ und $t \in [0,1]$ gilt:

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Weiter gilt: f ist konkav $\iff f''(x) \leq 0$

11.4.3 Minimum

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ ist ein Minimum}$$

11.4.4 Maximum

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0 \implies x_0 \text{ ist ein Maximum}$$

11.5 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (mit $a < b$) stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b); dann gilt:

$$\exists \gamma \in (a,b) : f'(\gamma) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

11.5.1 Satz von Rolle

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (mit $a < b$) stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b); dann gilt:

$$f(a) = f(b) \implies \exists \gamma \in (a,b) \text{ so dass } f'(\gamma) = 0$$

11.6 Regel von L'Hospital

Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $g(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$ und $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$ oder ∞; dann gilt:

$$\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert} \implies \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

11.7 Wichtige Ungleichungen

11.7.1 Cauchy-Schwartzsche Ungleichung

Seien folgende Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gilt:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

Zusätzlich gilt folgendes unter der Verwendung der Norm $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

11.7.2 Young'sche Ungleichung

Sind $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $a, b \geq 0$; dann gilt:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

11.7.3 Mittrovski

11.8 Kurvendiskussion

Bei der Kurvendiskussion werden Extrema, Wendepunkte und Konvexität/Konkavität untersucht.

Tipp Konvexität Um die Konvexität/Konkavität zu untersuchen, arbeitet man mit der zweiten Ableitung der Funktion. Dabei ist es empfohlen $f''(x)$ anhand der Signumfunktion sgn auf Konvexität/Konkavität zu untersuchen.
Beispiel:

$$f''(x) = -e^{2x} + 2e^x + 1$$
$$\implies \operatorname{sgn}(f''(x)) = \operatorname{sgn}(-e^{2x} + 2e^x + 1)$$
$$\overset{\text{Subst.}}{=} \operatorname{sgn}(-y^2 + 2y + 1) = \operatorname{sgn}((y - 1 + \sqrt{2})(-y + 1 + \sqrt{2}))$$
$$\overset{\text{Rücksubst.}}{=} \operatorname{sgn}((-e^x + 1 + \sqrt{2})\underbrace{(e^x - 1 + \sqrt{2})}_{>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}})$$
$$= \operatorname{sgn}(-e^x + \sqrt{2} + 1)$$
$$\implies -e^x + \sqrt{2} + 1 = 0 \iff x = \ln(\sqrt{2} + 1)$$
$$\implies \operatorname{sgn}(f''(x)) = \begin{cases} +1 & \text{für } x < \ln(1+\sqrt{2}) \\ 0 & \text{für } x = \ln(1+\sqrt{2}) \\ -1 & \text{für } x > \ln(1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

$\implies f$ konvex für $x < \ln(1+\sqrt{2})$, konkav für $x > \ln(1+\sqrt{2})$.
Weiter besitzt f bei $x = \ln(1+\sqrt{2})$ einen Wendepunkt

12 Integralrechnung

12.0.1 Tipps: Integration

Polynomdivision Handelt es sich bei der zu integrierenden Funktion f um eine unecht gebrochenrationale Funktion (Grad vom Zählerpolynom $\geq$ Grad vom Nennerpolynom), so kann mit einer Polynomdivision der Term wesentlich vereinfacht werden.

Versteckte partielle Integration $\int f(x)\mathrm{d}x = \int 1 \cdot f(x)\mathrm{d}x$

Integration glatter Funktionen Bei Integralen von glatten Funktionen wie e^x und den trigonometrischen Funktionen ist es oft empfehlenswert partielle Integration anzuwenden.

Immer Ableitung der zu integrierenden Funktion anschauen *Beispiel*: $\int \tan^2(x), \quad \tan'(x) = \tan^2(x) + 1 \implies \int \tan^2(x) - 1\mathrm{d}x + x = \tan(x) + x + C$

Anhand partieller Integration auf Ursprungsintegral gelangen *Beispiel:* $\int \sinh(t)\cos(t) \overset{\text{part. Int.}}{=} \sinh(t)\sin(t) - \int \cosh(t)\sin(t) \overset{\text{part. Int.}}{=} \sinh(t)\sin(t) - (-\cosh(t)\cos(t) + \int \sinh(t)\cos(t) \overset{\text{Nach ges. Int. auflösen}}{=} \int \sinh(t)\cos(t) = \frac{1}{2}(\sinh(t)\sin(t) + \cosh(t)\cos(t)) + C$

12.1 Partition

Partition eines Intervalls $[a, b]$

$$P = \{x_0, \ldots, x_N\} \quad \mathcal{P} = \{P | P = Partition\}$$

P ist eine einzelne Partition und $\mathcal{P}$ ist die Menge aller Partitionen

12.2 Unter- und Obersumme, und das Riemannsche Integral

$$\text{Obersumme} \quad \overline{S}(f, P) := \sum_{k=1}^{N} |x_k - x_{k-1}| \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$
$$\text{Untersumme} \quad \underline{S}(f, P) := \sum_{k=1}^{N} |x_k - x_{k-1}| \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

Falls:

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} \underline{S}(f, P) = \inf_{P \in \mathcal{P}} \overline{S}(f, P)$$

heisst f *Riemann-integrierbar* und der gemeinsame Wert:

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} \underline{S}(f, P) =: \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

heisst *Riemannsche Integral*

12.2.1 Riemannsche Summen

Verwendet man Riemannsche Summen um das Integral zu definieren, so erhält man folgende Definition:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\mu(P) \to 0} \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}| f(\xi_k) \quad \xi \in [x_{k-1}, x_k]$$

$\mu(P)$ ist dabei die *Feinheit der Partition* P, als der Abstand zwischen zwei Punkte $x_i, x_{i+1} \in P$

12.3 Anwendung der Riemannschen Summen um aus einer Reihe ein Integral zu berechnen

Sei eine Summe der Form $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(n,k)$ gegeben.

1. Versuch: Klammere im Nenner sowie Zähler die grösste Potenz von n aus. Nenne diesen Term d_n

   Beachte: $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$ muss erfüllt sein.

2. Wähle x_k (in Abhängigkeit von k *und* n, falls d_n auch von n abhängig ist), so dass folgende Gleichung erfüllt wird:

$$|x_k - x_{k-1}| = d_n$$

3. Verschiebe die Summe, so dass sie bei $k = 0$ beginnt. Versichere dabei, dass der ausgeklammerte Term für $n \longrightarrow \infty$ schwindet.

4. Die Summe sollte umgeformt nun folgende Form haben:

$$\sum_{k=0}^{n} d_n \cdot f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} |x_k - x_{k-1}| \cdot f(x_k)$$

5. Die Summe entspricht der Definition der Riemannschen Summe; es folgt

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}| \cdot f(x_k) = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$a =$ Startindex der Summe eingesetzt in x_k

$b =$ Endindex der Summe eingesetzt in x_k

12.3.1 Beispiel: Riemannsche Summen

Löse $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

1. Grösste Potenz von n ausklammern:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

$$\Longrightarrow d_n = \frac{1}{n}$$

2. Wähle $x_k = \frac{k}{n}$ und überprüfe:

$$|x_k - x_{k-1}| \stackrel{?}{=} d_n \Longleftrightarrow \left|\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right| \stackrel{?}{=} d_n$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{n} = d_n \checkmark$$

3. Verschiebe die Summe, so dass sie bei $k = 0$ startet:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

4. $x_{k=0} = 0, x_{k=n} = 1$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\frac{1}{1+x^2}$$

$$= \arctan(1) - \arctan(0) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

12.4 Rechenregeln

Seien f, g Riemann-integrierbar

(i) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

(ii) $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \lambda\in\mathbb{C}$

(iii) $f(x) \le g(x) \quad \forall x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

(iv) $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

(v) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

(vi) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

12.5 Fundamentalsatz der Integralrechnung

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad a \le x \le b$$

F ist differenzierbar und $F'(x) = f(x)$
F heisst *Stammfunktion* von f
F_1 und F_2 Stammfunktionen von $f \Rightarrow F_1 - F_2 = c$ konstant
Es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

12.6 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sowie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und entweder $g \ge 0$ oder $g \le 0$; dann existiert ein $\xi \in [a,b]$, so dass

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx$$

12.7 Partielle Integration

Seien im folgenden u, v stetig differenzierbar.

$$\int u'\cdot v = \int (u\cdot v)' - \int u\cdot v'$$
$$= \quad u\cdot v \quad - \int u\cdot v'$$

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b)\cdot v(b) - u(a)\cdot v(a) - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Tipp: Wähle die einfacher zu integrierende Funktion als u' und die Funktion, deren Ableitung einfacher wird als v.

12.8 Integration durch Substitution

1. Aufstellen der Substitutionsgleichung

$$u = g(x) \quad \frac{du}{dx} = g'(x) \quad dx = \frac{du}{g'(x)}$$

Wichtig: Der Term $g'(x)$ muss sich nach der Substitution wegkürzen, da sich ansonsten von x und u abhängige Terme im Integral befinden. Deshalb ist in vielen Fällen folgendes empfehlenswerter:

$$x = h(u) \quad \frac{dx}{du} = h'(u) \quad dx = h'(u)du$$

2. Durchführen der Substitution

$$\int f(x)dx = \int \varphi(u)du$$

Wenn man bei bestimmten Integralen die Grenzen mitsubstituiert entfällt die Rücksubstituion!

3. Berechnung des neuen Integrals

$$\int \varphi(u)du = \phi(u) \quad \phi'(u) = \varphi(u)$$

4. Rücksubstitution

$$\int f(x)dx = \int \varphi(u)du = \phi(U) = \phi(g(x)) = F(x)$$

12.8.1 Beispiel: Integration durch Substitution

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx = ?$$

$$u = \sin x \iff \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x \iff \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\cos x}$$

Substitution untere Grenze: $x = 0 \Rightarrow u = \sin 0 = 0$
Substitution obere Grenze: $x = \pi/2 \Rightarrow u = \sin \pi/2 = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x \mathrm{d}x = \int_0^1 u^4 \cos x \frac{\mathrm{d}u}{\cos x}$$
$$= \int_0^1 u^4 \mathrm{d}u = \left[\frac{1}{5}u^5\right]_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

12.9 Partialbruchzerlegung

Sei $f(x)$ gegeben.

1. $f(x)$ ist unecht gebrochenrational $\implies$ Polynomdivision $\implies$ $f(x) = p(x) + r(x)$. $r(x)$ ist dabei eine echt gebrochenrationale Funktion
2. Sei also $r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$
3. Finde Nullstellen von $N(x)$
4. Analysiere jede Nullstelle x_i:
   - x_i ist eine t-fache reelle Nullstellen:

$$\frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x - x_r)^t}$$

   - x_i ist eine t-fache komplexe Nullstellen:

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{B_r x + C_r}{(x^2 + px + q)^t}$$

5. Anhand der gefundenen Nullstellen kann $N(x)$ umgeschrieben werden zu $N(x) = (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)$
6. Wir erhalten folgende Gleichung:

$$r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{Z(x)}{(x - x_1)\cdots(x - x_n)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \ldots$$

7. Multipliziere die obige Gleichung mit dem Nennerterm $(x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)$:

$$\implies Z(x) = A_1(x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n) + \ldots$$

8. Setze alle Nullstellen x_i in Z ein, inklusive $x = 0$ oder führe Koeffizientenvergleich durch

2.3 Tabelle der Grund- oder Stammintegrale

C, C_1, C_2: Reelle Integrationskonstanten

$\int 0\,dx = C$	$\int 1\,dx = \int dx = x + C$
$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$	$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$	$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$
$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
$\int \dfrac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C$	$\int \dfrac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\coth x + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+1}\right\rvert + C$	
$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcosh}\lvert x\rvert + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C \qquad (\lvert x\rvert > 1)$	
$\int \dfrac{1}{1-x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + C_1 & \lvert x\rvert < 1 \\ & \text{für} \\ \operatorname{arcoth} x + C_2 = \dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + C_2 & \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$	

3.1.2 Spezielle Integralsubstitutionen (Tabelle)

Integraltyp	Substitution	Neues Integral bzw. Lösung	Beispiel
(A) $\int f(ax+b)\,dx$	$u = ax + b$ $dx = \dfrac{du}{a}$	$\dfrac{1}{a}\cdot\int f(u)\,du$	$\int \sqrt{4x+5}\,dx$ $(u = 4x + 5)$
(B) $\int f(x)\cdot f'(x)\,dx$	$u = f(x)$ $dx = \dfrac{du}{f'(x)}$	$\dfrac{1}{2}\,[f(x)]^2 + C$	$\int \sin x\cdot\cos x\,dx$ $(u = \sin x)$
(C) $\int [f(x)]^n\cdot f'(x)\,dx$ $(n \neq -1)$	$u = f(x)$ $dx = \dfrac{du}{f'(x)}$	$\dfrac{1}{n+1}\,[f(x)]^{n+1} + C$	$\int (\ln x)^2\cdot\dfrac{1}{x}\,dx$ $(u = \ln x)$
(D) $\int f[g(x)]\cdot g'(x)\,dx$	$u = g(x)$ $dx = \dfrac{du}{g'(x)}$	$\int f(u)\,du$	$\int x\cdot e^{x^2}\,dx$ $(u = x^2)$
(E) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$u = f(x)$ $dx = \dfrac{du}{f'(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert + C$	$\int \dfrac{2x-3}{x^2-3x+1}\,dx$ $(u = x^2 - 3x + 1)$
(F) $\int R\left(x; \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ R: Rationale Funktion von x und $\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\cdot\sin u$ $dx = a\cdot\cos u\,du$ $\sqrt{a^2-x^2} = a\cdot\cos u$		$\int \dfrac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ $(x = 2\cdot\sin u)$
(G) $\int R\left(x; \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ R: Rationale Funktion von x und $\sqrt{x^2+a^2}$	$x = a\cdot\sinh u$ $dx = a\cdot\cosh u\,du$ $\sqrt{x^2+a^2} = a\cdot\cosh u$		$\int \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ $(x = 3\cdot\sinh u)$
(H) $\int R\left(x; \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ R: Rationale Funktion von x und $\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\cdot\cosh u$ $dx = a\cdot\sinh u\,du$ $\sqrt{x^2-a^2} = a\cdot\sinh u$		$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$ $(x = 5\cdot\cosh u)$

(I) $\int R(\sin x; \cos x)\, dx$ R: Rationale Funktion von $\sin x$ und $\cos x$	$u = \tan(x/2)$ $dx = \frac{2}{1+u^2}\, du$ $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$		$\int \frac{1+\cos x}{\sin x}\, dx$
(J) $\int R(\sinh x; \cosh x)\, dx$ R: Rationale Funktion von $\sinh x$ und $\cosh x$	$u = e^x, \; dx = \frac{du}{u}$ $\sinh x = \frac{u^2-1}{2u}$ $\cosh x = \frac{u^2+1}{2u}$		$\int \frac{\sinh x + 1}{\cosh x}\, dx$

13 Differentialgleichungen

13.1 Zeitabhängige Differentialgleichungen n-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) = F(x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n-1)}(t), \mathbf{t})$$

13.2 Zeitunabhängige Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) = F(x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n-1)}(t))$$

13.3 Inhomogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_k x^{(k)}(t)) + x^{(n)} = k(t) \qquad \text{(I)}$$

13.4 Homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_k x^{(k)}(t)) + x^{(n)} = 0 \qquad \text{(H)}$$

Satz 1 Seien $x_1(t), x_2(t)$ Lösungen von (H)

$\implies \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$ sind Lösungen von (H) mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

Satz 2 Sei $x_1(t)$ eine Lösung von (H) und $x_2(t)$ eine Lösung von (I)

$\implies \lambda_1 x_1(t) + x_2(t)$ ist auch eine Lösung von (I)

13.5 Lösungsrezept für inhomogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Allgemeine Form einer inhomogenen linearen Differentialgleichung (I):

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_k x^{(k)}(t)) + x^{(n)} = K(t) \qquad \text{(I)}$$

Lösungsweg:

1. Löse die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung (H) $x_H(t)$
   (a) Setze Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ in (H) ein ($\lambda \in \mathbb{C}$)

   $$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(a_k \cdot \lambda^k \cdot e^{\lambda t}) + \lambda^n e^{\lambda t} = 0$$

   $\Longrightarrow e^{\lambda t}$ verschwindet

   $$\Longrightarrow P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k = 0$$

   (b) Finde Nullstellen von $p(\lambda)(\lambda_1, \ldots, \lambda_2)$ mit den zugehörigen Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_2$
   (c) Dann hat (H) die Lösung

   $$x_H(t) = \sum_{l=1}^{r}\sum_{i=0}^{k-1} c_{l_i} t^i e^{\lambda_l \cdot t}$$

2. Finde eine einzige partikuläre Lösung $x_P(t)$ von (I)
   (a) Bestimme m falls $K(t)$ folgende Form hat:

   $$\sum_{k=0}^{n-1}(a_k x^{(k)}(t)) + x^n = K(t)$$

   Beispiele: $t^2 \cdot \mathrm{e}^0 \Longrightarrow m = 1, \quad (1+t^3) \cdot \mathrm{e}^{2t} \Longrightarrow m = 2$
   (b) μ ist die k-fache Nullstelle von $P(\lambda)$. Falls μ keine Nullstelle von $P(\lambda)$ ist, gilt: $k = 0$
   (c) Wähle folgende partikuläre Lösung

   $$x_P(t) = (\sum_{i=0}^{m} c_i t^i) t^k \mathrm{e}^{\mu t}$$

   (d) Bestimme c_i durch Einsetzen in die Differentialgleichung aus der Aufgabenstellung. **Beachte** dabei die Ableitungen!
3. Die Lösung der Differentialgleichung lautet

   $$x_I(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

   (a) Falls $K(t) = \sum_{i=1}^{s} c_i K_i(t)$ ist, dann existieren mehrere partikuläre Lösungen und das *Superstitionsprinzip* tritt in Kraft:

   $$x_P(t) = \sum_{i=1}^{s} c_i x_{P,i}(t)$$

13.5.1 Beispiel: Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 3. Ordnung

Es sei eine Lösung $x(t)$ für die Differentialgleichung $x'''(t) - x''(t) = \mathrm{e}^{2t}$ zu finden.

1. Löse die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung $x_H(t)$:

$$\begin{aligned}
&x'''(t) - x''(t) = 0\\
&\Longrightarrow P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1)\\
&\Longrightarrow \lambda_1 = 0 \quad k_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1 \quad k_2 = 1\\
&\Longrightarrow x_H(t) = c_1 t^0 \mathrm{e}^{0t} + c_2 t \mathrm{e}^{0t} + c_3 \mathrm{e}^t\\
&\Longleftrightarrow x_H(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t
\end{aligned}$$

2. Finde eine partikuläre Lösung $x_P(t)$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
&x'''(t) - x''(t) = \mathrm{e}^{2t}\\
&\Longrightarrow m = 0, \mu = 2, k = 0 \text{ (keine Nullstelle)}\\
&\Longrightarrow x_P(t) = c_0 t^0 t^0 \mathrm{e}^{2t} = c_0 \mathrm{e}^{2t}
\end{aligned}$$

Einsetzen in (I):

$$\Longrightarrow 8c_0 \mathrm{e}^{2t} - 4c_0 \mathrm{e}^{2t} = e^{2t} \Longleftrightarrow c_0 = \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow x_P(t) = c_0 \mathrm{e}^{2t} = \frac{1}{4} \mathrm{e}^{2t}$$

3. Die Lösung der Differentialgleichung lautet

$$x_I(t) = \underline{\underline{\boldsymbol{x(t)} = c_1 + c_2 t + c_3 \mathrm{e}^t + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}}}$$

13.5.2 Komplexifizierung

$$\begin{aligned}
&K(t) = \mathrm{Re}(\tilde{K}(t))\\
&\Longrightarrow x_P(t) = \mathrm{Re}(\tilde{x}_P(t))
\end{aligned}$$

Beispiel $K(t) = \cos(t) = \mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}t})$

13.6 Lösungsrezept für gewöhnliche Differentialgleichungen

Allgemeine Form gewöhnlicher Differentalgleichungen:

$$x'(t) = f(x(t)) \qquad f \text{ stetig}$$

Lösungsweg:

1. Löse die homogene Gleichung durch Separation der Variablen. *Beispiel*: $x'(t) = 2tx^2 \iff x'(t) - 2x^2t = 0$
   (a) Bringe gleiche Variablen auf eine Seite der Gleichung
   (b) Ersetze $x'(t)$ mit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$
   (c) Integriere beide Seiten und notiere die entstehende Integrationskonstante nur auf einer der beiden Seiten
   (d) Löse die Gleichung nach x auf und beachte, dass die Integrationskonstante jegliche Vorzeichen und Vorfaktoren verschluckt:
   $$\sqrt{\frac{-1}{C+t}} = \sqrt{\frac{1}{-C-t}} = \sqrt{\frac{1}{C-t}}$$
   (e) Entweder:
   - Finde partikuläre Lösung
   - Variation der Konstanten
     i. Löse zuerst die homogene Gleichung durch Separation der Variablen
     ii. Führe Variation der Konstanten durch, das heisst die Konstanten C werden zeitabhängig ($C(t)$) in die Differentialgleichung aus der Aufgabe eingesetzt.
     iii. **Beachte:** Die $C(t)$ Terme müssen sich aufheben nach dem Einsetzen
     iv. Integriere beide Seiten und notiere die entstehende Integrationskonstante nur auf einer der beiden Seiten
     v. Setze die berechnete Konstante in $x_H(t)$ ein

13.6.1 Beispiel: Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung mit Separation der Variablen

$$x'(t) = 2tx^2 \iff \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2tx^2 \iff \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 2t\mathrm{d}t$$
$$\implies \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int 2t\mathrm{d}t$$
$$\iff -\frac{1}{x} = t^2 + C$$
$$\iff \underline{\underline{x = \frac{-1}{C+t^2}}}$$

13.6.2 Beispiel: Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung mit Variation der Konstanten

1. Löse Homogene Gleichung $x'(t) - \tanh(t)\cdot x(t) = 0$
   $$\implies \text{Separation der Variablen}$$
   $$\implies \frac{\mathrm{d}x}{x} = \tanh(t)\mathrm{d}t$$
   $$\implies \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \tanh(t)\mathrm{d}t$$
   $$\iff \log(x) = \log(\cosh(t)) + C$$
   $$\iff x_H(t) = \cosh(t)\cdot \mathrm{e}^C$$
   $$\iff x_H(t) = \cosh(t)\cdot D \text{ (Konstante umb.)}$$
2. Variation der Konstanten: Konstante wird variabel
   $$x_I(t) = D(t)\cdot\cosh(t) \implies \text{Einsetzen}$$
   $$\implies D'(t)\cdot\cosh(t)$$
   $$+\underbrace{D(t)\sinh(t) - D(t)\cosh(t)\tanh(t)}_{=0} = 1$$
   $$\iff D'(t)\cosh(t) = 1 \implies \text{Sep. d. Var.}$$
   $$\implies D'(t) = \frac{1}{\cosh(t)} \implies \int D'(t) = \int \frac{1}{\cosh(t)}$$
   $$\iff D(t) = 2\arctan(\mathrm{e}^t) + E$$
   $$\implies \text{Einsetzen in } x_H(t)$$
   $$\implies x_I(t) = x(t) = \cosh(2\arctan(\mathrm{e}^t) + E)$$

13.7 Lösungsrezept für lineare Differentialgleichungssysteme 1. oder 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (Allgemeine Lösung und Anfangswertproblem)

Sei $\dot{y}(t) = Ay(t)$ (lineares DGLS 1. Ordnung) oder $\ddot{y}(t) = Ay(t)$ (lineares DGLS 2. Ordnung) gegeben.

1. Berechne Eigenwerte von A: $\det(A - \lambda I_n) = 0$
2. Berechne die zu den Eigenwerten λ_i gehörenden Eigenvektoren $v^{(i)}$ indem $(A - \lambda_i I_n)x = 0$ gelöst wird
3. Definiere die Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
4. Definiere die Transformationsmatrix T anhand der Eigenvektoren: $T = \begin{pmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} & \ldots & v^{(n)} \end{pmatrix}$

   Kontrolle Die Position der Spaltenvektoren in T sollten mit der Position der dazugehörigen Eigenwerte in D übereinstimmen
5. Schreibe $y(t) = Tx(t)$. Fallunterscheidung:
   - **Allgemeine Lösung DGLS 1. Ordnung**:
   $$y(t) = \sum_i c_i \cdot \mathrm{e}^{\lambda_i t} \cdot v_i$$
   - **Allgemeine Lösung DGLS 2. Ordnung**:
   $$y(t) = \sum_i v_i \cdot (a_i \cdot \cos(\sqrt{-\lambda_i} \cdot t) + b_i \cdot \sin(\sqrt{-\lambda_i} \cdot t))$$
6. **Anfangsbedingungen** $y(0), \dot{y}(0), \ldots$ sind gegeben:
   (a) Werte $x(0)$ aus. Ausgewertet sollte $x(0)$ nur aus Konstanten bestehen
   (b) Transformiere die Anfangswerte: $y(0) = Tx(0)$
   (c) Bestimme die Konstanten a_i, b_i
   (d) Die Lösung berechnet sich durch $y(t) = Tx(t)$ und hat die Form
   $$y(t) = x_1(t) \cdot v^{(1)} + x_2(t) \cdot v^{(2)} + \cdots + x_n(t) \cdot v^{(n)}$$

13.7.1 Beispiel: Lösung eines linearen Differentialgleichungssystems 2. Ordnung

Sei eine allgemeine Lösung zum folgenden DGLS 2. Ordnung zu bestimmen:

$$\ddot{y}(t) = Ay(t) \qquad A = \begin{pmatrix} 11 & -15 \\ 20 & -24 \end{pmatrix}$$

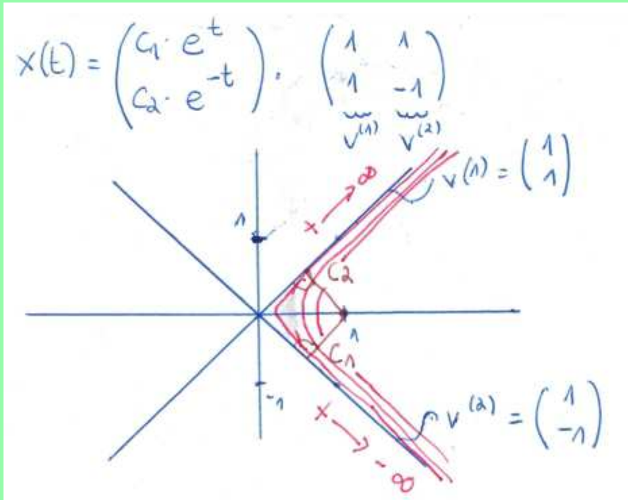
1. Eigenwerte von A:
$$\lambda_1 = -4 \qquad \lambda_2 = -9$$
2. Eigenvektoren von A:
$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
3. Diagonalmatrix D und Transformationsmatrix T:
$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$
4. Allgemeine Lösung des DGLS 2. Ordnung:
$$x(t) = (a_1 \cdot \cos(\sqrt{2}t) + b_1 \cdot \sin(\sqrt{2}t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$+ (a_2 \cdot \cos(\sqrt{3}t) + b_2 \cdot \sin(\sqrt{3}t)) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

13.8 Skizze der Lösung eines linearen Differentialgleichungssystems

1. Sei $y(t)$ die Lösung eines linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung $Ay(t) = \dot{y}(t)$:
$$y(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \\ c_2 \cdot e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} \end{pmatrix}$$
2. Zeichne die Geraden der Eigenvektoren ein
3. Lasse $t \longrightarrow \infty$ und $t \longrightarrow -\infty$ gehen, und schaue, wie sich die Konstanten c_1, c_2 verhalten. c_1 ist dabei der Abstand der Geraden von $v^{(2)}$ zu einem Punkt (x, y). Das gleiche gilt für c_2 bezüglich $v^{(1)}$.

13.8.1 Beispiel: Skizze einer Lösung eines linearen Differentialgleichungssystems

In der folgenden Graphik kann man sehen, dass für $t \longrightarrow \infty$ c_2 schwindet, also der Abstand zu $v^{(1)}$ immer kleiner wird. Für $t \longrightarrow -\infty$ schwindet c_1 und der Abstand zu $v^{(2)}$ wird immer kleiner, der Abstand zu $v^{(1)}$ jedoch immer grösser.



Wichtig: Die roten Linien müssen auch in den anderen drei Bereichen des Graphen eingezeichnet werden

14 Matrizen

14.1 Determinante

14.1.1 Schachbrettregel

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots & + & - \\ - & + & \dots & & & & \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ - & + & - & + & \dots & - & + \end{pmatrix}$$

14.2 Spur

$$\operatorname{spur}(A) = \sum \text{ Diagonalelemente von } \; A$$

14.2.1 Zyklische Vertauschungen

$$\operatorname{spur}(A \cdot B \cdot C) = \operatorname{spur}(C \cdot A \cdot B) = \operatorname{spur}(B \cdot C \cdot A).$$

14.3 Matrixnormen

$$||A|| = \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{||Ax||}{||x||}$$

$$||A||_2 = \sqrt{\max\{\text{Eigenwerte von } A^T A\}} \quad \text{Spektralnorm}$$

$$||A||_1 = \max_i \{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\} \quad \text{Zeilensummennorm}$$

$$||A||_\infty = \max_j \{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\} \quad \text{Spaltensummennorm}$$

14.4 Summendarstellung $x^T A x$

$$x^T A x = \sum_{i,j}^n x_i x_j a_{ij} \qquad x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

14.5 Ableitung des Skalarprodukts

$$\mathrm{d}(\langle x, x \rangle)h = 2\langle x, h \rangle$$

14.6 Ableitung der Determinanten

$$d(\det(A))H = \det(A) \cdot \operatorname{spur}(A^{-1}H)$$

15 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

15.1 Ableitung

Sei $f : U \mapsto \mathbb{R}^m$ wobei $U \in \mathbb{R}^n$ offen ist. Falls für so eine Funktion f und einen Punkt $x \in U$ eine **lineare Abbildung** A_x existiert, so dass

$$\lim_{h \to \infty} \frac{||f(x+h) - f(x) - A_x h||}{||h||} = 0$$

gilt, dann heisst $A_x = \mathrm{d}f(x)$ die *Ableitung (Jacobi Matrix)* von f an der Stelle x

15.2 Richtungsableitung

Seien V, W Banach-Räume und $\Omega \subset V$ offen. Eine Abbildung $f : \Omega \mapsto W$ besitzt an der Stelle $x_0 \in \Omega$ eine *Richtungsableitung* in Richtung $v \in V$, wenn der Grenzwert

$$\partial_h f(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

existier.

15.3 Partielle Ableitung

f heisst an der Stelle x_0 *partiell differenzierbar* wenn die Richtungsableitungn

$$\partial_i f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0)$$

für $i = 1, \dots, n$ existieren.
Die Vektoren $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \in \mathbb{R}^m$ heissen *partielle Ableitungen* von f an der Stelle x_0
Ist f a.d.St. a differenzierbar, so existieren dort **alle** Richtungsableitungen und es gilt

$$\partial_h f(a) = \mathrm{d}f(a)h \quad h \in V$$

Merke: Richtungsableitung geht in Richtung v, geht die Richtungsableitung aber nicht in eine beliebige Richtung sondern in Richtung der Koordinaten-Vektoren e_i dann nennt man es partielle Ableitung!

15.4 Jacobi-Matrix

Ist f differenzierbar a.d.St. a so ist die Ableitung durch die *Jacobi-Matrix* gegeben:

$$\mathrm{d}f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

15.5 Gradient

Ist f in x_0 partiell differenzierbar, so ist der *Gradient* von f a.d.St. x_0 der Vektor

$$\operatorname{grad}(f) := \nabla f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Der Gradient ist also einfach ein Spaltenvektor mit den Partiellen ableitungen! Er zeigt immer in Richtung der maximalen (negativer Gradient in Richtung minimaler) Steigung .

15.6 Höhere Ableitungen

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ heisst k*-mal (stetig) differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen von f existieren und überall $(k-1)$-mal (stetig) differenzierbar sind. Der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen wird mit $C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m$ bezeichnet.
Ist eine funktion beliebig oft differenzierbar, nennen wir sie *glatt* und bezeichnen den Raum mit $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$

15.7 Hesse-Matrix

Ist $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ **2 mal stetig differenzierbar** so gilt für die 2. Ableitung:

$$\mathrm{d}^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Symmetrie der Hesse-Matrix Nach dem Satz von Schwartz ist die Reihenfolge der 2. Ableitungen vertauschbar und somit ist die Hessematrix *symmetrisch*

15.8 Differenzierbarkeitskriterium

Die Abbildung f heisst **differenzierbar** a.d.St. a genau dann wenn

(i) alle Komponenten f_i a.d.St. a differenzierbar sind

(ii) alle partiellen Ableitungen in a existieren und **stetig** sind

(iii) die Funktion Summe / Produkt / Komposition differenzierbarer Funktionen ist

15.8.1 Beispiel: Stetige Differenzierbarkeit zeigen

Grundidee: Differenzierbarkeitskriterium

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Für $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\partial_x f(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\partial_y f(x,y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 + 2y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

Beide partiellen Ableitungen existieren und sind Polynome also auch stetig

2. Für $(x,y) = (0,0)$:

$$\begin{aligned} \partial_x f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\left[\binom{0}{0} + t\binom{1}{0}\right] - f\left[\binom{0}{0}\right]}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t^3 \cdot 0 - t \cdot 0}{t^2} = 0 \\ \partial_y f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\left[\binom{0}{0} + t\binom{0}{1}\right] - f\left[\binom{0}{0}\right]}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{0 \cdot t - 0 \cdot t^3}{t^2} = 0 \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen existieren für $(x,y) \neq (0,0)$.

3. Nun ist zu zeigen, dass die partiellen Ableitungen überall stetig sind, also: $\partial_x f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(0,0)$ Dazu verwendet man Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) \Rightarrow & \lim_{r\to 0} \frac{r^5 \sin\varphi(\cos^4\varphi + 4\cos^2\varphi \sin^2\varphi - \sin^4\varphi)}{r^4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die beiden Grenzwerte stimmen überein $\Rightarrow$ partielle Ableitungen existieren überall und sind überall stetig $\Rightarrow$ f ist auf $\mathbb{R}^2$ überall differenzierbar

16 Taylorreihen / Taylorpolynome

Anstatt eine Funktion lokal durch eine lineare Abbildung zu approximieren, können wir sie, falls die Funktion genügend oft differenzierbar ist, durch polynomiale Funktionen annähern.

16.1 Taylorpolynom

16.2 Taylorpolynom vom Grad 2 um Punkt a

$$\begin{aligned} T_2 f(x,a) &= f(a) + \mathrm{d}f(a)(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^T \mathrm{d}^2 f(a)(x-a) \\ &= f(a) + \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2}(x_1 - a_1 \ldots x_n - a_n) f''(a) \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathrm{d}f(a)$	Gradient von f a.d.St. a
$\mathrm{d}^2 f(a)$	Hessematrix von f a.d.St. a

16.3 Beispiele

17 Extremalwertprobleme

17.1 Kritischer Punkt

x_0 heisst *kritischer Punkt* wenn

$$\mathrm{d}f(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \ldots \partial_n f(x_0)) = 0$$

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_n f(x_0) \end{pmatrix} = 0$$

17.2 Hinreichendes Kriterium für Extrema

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \mapsto \mathbb{R}C^2$-Funktion und x_0 ein kritischer Punkt von f

(i) x_0 lokales Minimum $\Rightarrow \mathrm{d}^2 f(x_0) \geq 0$

(ii) $\mathrm{d}^2 f(x_0) > 0$ (positiv definit, alle EW > 0) $\Rightarrow x_0$ striktes lokales Minimum

(iii) x_0 lokales Maximum $\Rightarrow \mathrm{d}^2 f(x_0) \leq 0$

(iv) $\mathrm{d}^2 f(x_0) < 0$ (negativ definit, alle EW < 0) $\Rightarrow x_0$ striktes lokales Maximum

(v) $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ indefinit ($\exists$ EW > 0 und $\exists$ EW < 0) $\Rightarrow x_0$ ist Sattelpunkt

Es gilt: symmetrische 2×2 Matrix A (z.B. Hesse-Matrix) positiv definit $\iff spur(A) > 0$ und $det(A) > 0$

17.3 Konvexität

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \mapsto \mathbb{R}$ heisst *(strikt) konvex*, wenn $\forall x, y \in U$ gilt:

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad t \in [0,1]$$

Strikt konvex bedeutet, dass die Ungleichung strikt ($<$ statt $\leq$) wird.

Satz: f (strikt) konvex $\iff \mathrm{d}^2 f(x) \geq (>) 0$

17.3.1 Beispiel: Kritische Punkte bestimmen

$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ 1. Kritische Punkte bei $\mathrm{d}f(x,y) = 0$

$$\mathrm{d}f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y,) \\ \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y \\ \\ 3y^2 + 3x \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} x^2 + y &= 0 \\ y^2 + x &= 0 \end{aligned}$$

Auflösen dieses GLS liefert die kritischen Punkte $P_1 = (0,0), P_2(-1,-1)$ 2. Hessematrix berechnen:

$$H := \mathrm{d}f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ \\ 3 & 6y \end{pmatrix} \quad H \text{ ist symmetrisch!}$$

3. Eigenwerte von H berechnen:

$$det(H - I_2\lambda) = det \begin{bmatrix} 6x - \lambda & 3 \\ \\ 3 & 6y - \lambda \end{bmatrix}$$
$$= (6x - \lambda)(6y - \lambda) - 9 = 0$$

4. Punkte P_1, P_2 einsetzen: $P_1(0,0)$

$$\lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda = \pm 3 \Rightarrow EW > 0 \wedge EW < 0$$

$\Rightarrow \mathrm{d}^2 f(0,0)$ ist indefinit $\Rightarrow P_1$ ist Sattelpunkt
$P_2(-1,-1)$

$$(\lambda + 3)(\lambda + 9) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -9 \Rightarrow EW < 0$$

$\Rightarrow \mathrm{d}^2 f(-1,-1)$ negativ definit$\Rightarrow P_2$ ist lokales Maximum

18 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

18.1 Variationsrechnung: Die Euler-Lagrange-Gleichungen

Sei $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ eine C^2 Funktion und ein Extremum der Funktion

$$f : X \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t))\mathrm{d}t$$

Dann sind die folgenden *Euler-Lagrange Gleichungen* erfüllt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)_i}(x(t)_i, \dot{x}(t)_i) - \frac{\partial L}{\partial x(t)_i}(x(t)_i, \dot{x}(t)_i) = 0$$

mit $i = 1, \ldots, n \quad t \in (0,1)$. $x(t)_i, \dot{x}(t)_i$ sind dabei die i-ten Koordinaten der Funktionen $x(t)$ bzw. $\dot{x}(t)$. L ist die *Lagrangefunktion*.

Energieerhaltung Sei $x(t)$ eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen; dann gilt:

$$E(x(t)) \equiv \text{const.}$$

wobei $E(x(t))$ die *Energie* ist.

Unabhängigkeit der Lagrangefunktion von t Falls die Lagrangefunktion *nicht* von t abhängig ist, so gilt *für jede Lösung $x(t)$ der Euler-Lagrange Gleichungen*:

$$E(x(t)) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)}(x(t), \dot{x}(t)) \cdot \dot{x}(t) - L(x(t), \dot{x}(t)) = \text{const.}$$

19 Implizite Funktionen

19.1 Implizites Funktionentheorem

19.1.1 Diffeomorphismen

Eine Funktion $f : U \to V$ wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen sind heisst C^k*-Diffeomorphismus*, falls f bijektiv ist und sowohl f wie auch f^{-1} k-mal stetig differenzierbar sind.

Lokaler Diffeomorphismus Ist $\det(\mathrm{d}f) > 0$, also $\mathrm{d}f$ invertierbar, so ist $\mathrm{d}f$ bijektiv und f ein *lokaler Diffeomorphismus*.

Diffeomorphiesatz Ist $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ ein lokaler Diffeomorphismus und f zusätzlich injektiv, so ist f ein *(globaler)* C^1-*Diffeomorphismus*

Definition Homöomorphismus $f : U \to V$ ist stetig, bijektiv und f^{-1} ist ebenfalls stetig $\Longleftrightarrow$ f ist ein *Homöomorphismus*

Diffeomorphismen aus Homöomorphismen Sei $f \in C^1(U, V)$ homöomorph und $\mathrm{d}f$ bijektiv $\implies$ f ist ein C^1-Diffeomorphismus.

19.1.2 Zeige, dass eine Abbildung ein Diffeomorphismus ist

Man unterscheide folgende Aufgabentypen:

- Der endlich-dimensionale Vektorraum V ist vorgegeben als $V = \mathbb{R}^n$ mit $n = 1, \dots, n$
  1. Berechne $\det(\mathrm{d}f)$ und überprüfe, dass $\det(\mathrm{d}f) > 0$ ist $\implies$ f ist ein lokaler Diffeomorphismus
  2. Versichere, dass f injektiv ist, indem folgende Definition der Injektivität verwendet wird (*stumpfsinniges* einsetzen):
  $$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$
  3. Es folgt: f ist ein Diffeomorphismus
- Der gegebene endlich-dimensionale Vektorraum V ist nicht $\mathbb{R}^n$, das heisst $V = X$
  1. Berechne die Umkehrfunktion von f indem $f(x) = y$ nach y aufgelöst wird
  2. Versichere, dass die Umkehrfunktion alle folgende Gleichungen erfüllt:
     (i) $f(f^{-1}(y)) = y$
     (ii) $f^{-1}(f(x)) = x$
  3. Zeige, dass $\mathrm{d}f$ existiert:
  $$\mathrm{d}f(x)v = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h} < \infty$$
  4. Zeige, dass $\mathrm{d}f$ stetig ist
  5. Es folgt: f ist ein Diffeomorphismus

19.1.3 Satz der Umkehrabbildung

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n$, und sei $\mathrm{d}f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv; dann existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x, so dass $f : U \to f(U)$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

Lemma zur Umkehrabbildung eines Diffeomorphismus Sei $f : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus und $f \in C^k$; dann folgt
$$f^{-1} \in C^k$$

Offenheitssatz Ist die Ableitung $\mathrm{d}f$ der Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ bijektiv, also invertierbar $\forall x \in U$, so ist $f(U)$ offen.

19.1.4 Satz von der impliziten Funktion

Sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Wenn für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ $f(x_0, y_0) = 0$ und $d_y f(x_0, y_0)$ bijektiv ist, dann folgt:
$$\exists U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m, g \in C^k(U;V) \text{ so dass}$$
$$g(x_0) = y_0 \text{ und } f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow g(x) = y \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$$

(x_0, y_0) nennt man dabei eine *Referenzlösung*. Zusätzlich gilt für die Ableitung von g
$$\mathrm{d}g(x) = -(d_y f(x, g(x)))^{-1} d_x f(x, g(x))$$

Ist die Ableitung bijektiv, so ist die Abbildung f in einer lokalen Umgebung bijektiv.

19.1.5 Beispiel: Anwendung Implizites Funktionen Theorem

$$x^2 + uy + e^v = 0$$
$$2x + u^2 - uv = 5$$

Zeige: $\exists C^1$-Funktion $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(u,x))$ in offener Umgebung von $(2,5) \in \mathbb{R}^2$, so dass $u(2,5) = -1, v(2,5) = 0$ gilt

1. Setup:

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$((x,y), \underbrace{(u,v)}_{\text{2te Variable}}) \mapsto F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} x^2 + uy + e^v \\ 2x + u^2 - uv \end{pmatrix}$$

2. Referenzlösung prüfen

$$F(2,5,-1,0) = \begin{pmatrix} 2^2 - 5 + 1 \\ 2^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3. Ableitung nach der 2ten Variable

$$d_2F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & e^v \\ 2u & -u \end{pmatrix}$$

4. Referenzlösung einsetzen

$$d_2F(2,5,-1,0) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2,1 & \end{pmatrix}$$

5. Determinante $\neq 0$ prüfen $det(d_2F(2,5,-1,0)) = 7 \neq 0 \Rightarrow d_2F(x_0, y_0, u(x_0,y_0), v(x_0,v_0))$ ist invertierbar
6. Impliziten Funktionensatz verwenden $\exists U \subset \mathbb{R}^2$ offene Umgebung um $(2,5) \in \mathbb{R}^2$ und $g : U \Rightarrow \mathbb{R}^2$ differenzierbar mit $F(x,y,g_1(x,y), g_2(x,v)) = (0,5)$
7. Falls nötig Ableitung von $g(x)$ berechnen

19.2 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

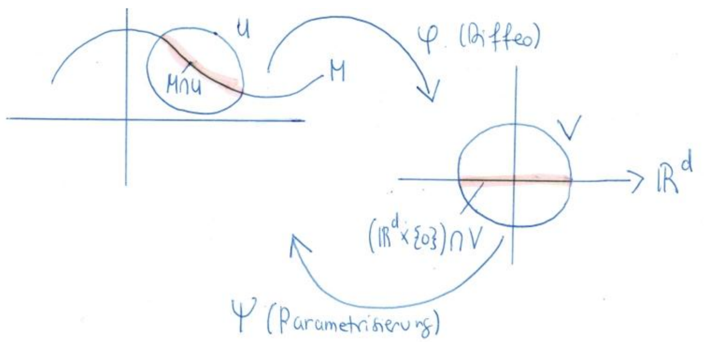
19.2.1 Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst *d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit*, falls für alle Punkte $p \in M$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von p ein C^k-Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$, wobei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen ist existiert mit

$$\varphi(M \cap U) \subset (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap V$$

Kartengebiet: $M \cap U$

Karte: $\varphi_i : U_i \to V_i$



19.2.2 Regulärer Wert

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Ein Punkt $y \in \mathbb{R}^m$ heisst *regulärer Wert von f*, falls $\mathrm{d}f(x)$ surjektiv ist $\forall x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = y$

19.3 Bestimme reguläre Werte einer Funktion

Sei $f : X \to Y$ gegeben, für welche die regulären Werte berechnet werden sollten

1. Berechne $\mathrm{d}f$
2. Versichere, dass $\mathrm{d}f$ surjektiv ist, also vollen Rang hat
3. Bestimme für welche Werte $k_i \in X \quad \mathrm{d}f(k_i) = 0$ ist. k_i sind dabei keine regulären Werte
4. Die regulären Werte von f ist die Menge $Y \setminus \{f(k_1), \ldots, f(k_s)\}$

19.3.1 Satz vom regulären Wert

Sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n-d})$ und sei $y \in \mathbb{R}^{n-d}$ ein regulärer Wert von f; dann ist $M = f^{-1}(y)$ eine d-dimensionale $(d = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\mathbb{R}^{n-d}))$ C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$

Surjektivität von $\mathrm{d}f$ $\quad \mathrm{d}f$ ist surjektiv $\iff \mathrm{d}f$ hat vollen Rang

19.3.2 Tangentialraum

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $p \in M$ und $f \in C^k(U; \mathbb{R}^{n-d})$, U eine Umgebung von p, so dass $M \cap U = f^{-1}(y)$ für einen regulären Wert $y \in \mathbb{R}^{n-d}$ von f, so ist

$$\mathrm{T}_pM = \ker(\mathrm{d}f(p)) = T_xM = \{v \in X \mid \mathrm{d}f(x)v = 0\}$$

19.4 Zeige, dass eine Menge M eine Untermannigfaltigkeit ist

Sei eine Menge $M := \{x \in X \mid P(x)\}$ gegeben, für welche gezeigt werden muss, dass eben diese eine Untermannigfaltigkeit von X ist.

1. Definiere eine Funktion $f : X \to Y$ so, dass $M = f^{-1}(c)$ gilt mit $c \in Y$. Verwende dazu die Eigenschaften aus der Mengendefinition von M:

   (i) Die Menge M definiert immer eine oder mehrere Eigenschaften für ihre Elemente. *Beispiel:* Alle Elemente der folgenden Menge M besitzen zwei Eigenschaften: $M := \{(x,y) \in X \times Y \mid \|x\| = 1, \|y-x\| = 1\}$

   (ii) Die Eigenschaften werden durch Gleichungen ausgedrückt. Die Anzahl Gleichungen bestimmt die Dimension der Bildmenge Y von f.

   (iii) Setze alle s Gleichungen von M $g_i = c_i$, so dass $f(x) = g = c \iff M = f^{-1}(c)$

   Tipp: Es ist üblich $c = 0$ zu wählen, so dass $f(x) = g = 0 \iff M = f^{-1}(0)$ gilt.

2. Überprüfe $\mathrm{d}f(x)$ auf Surjektivität indem versichert wird, dass $\mathrm{d}f(x)$ für alle $x \in M$ stehts vollen Rang besitzt oder im Falle des Gradienten $\nabla f(x)$ dieser nie schwindet.

   Tipp: Bestimme für welche Werte k $\mathrm{d}f$ verschwindet, also $\mathrm{d}f = 0$ ist. Hat man diese Werte gefunden, so sollte man überprüfen, dass für alle k gilt: $k \notin M$

3. Ist $\mathrm{d}f(x)$ surjektiv $\forall x \in M$, folgt aus $f(x) = c$ und der Definition des regulären Wertes, dass c ein regulärer Wert ist

4. Aus dem *Satz vom regulären Wert* folgt nun, dass $M = f^{-1}(c)$ eine $(\dim(X) - \dim(Y))$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von X ist.

19.4.1 Beispiel: Zeige, dass M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ist

Zu zeigen sei, dass $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1, \|y-x\| = 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ist.

1. Man wähle $c = 0$ und definiere daher

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \|x\|^2 - 1 \\ \|y-x\|^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Elemente der Menge M besitzen zwei Eigenschaften, daher ist f definiert als $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Es ist nun zu zeigen, dass $M = f^{-1}(0)$ eine Untermannigfaltigkeit ist

2. Die Ableitung von f ist

$$\mathrm{d}f(x,y) = \begin{pmatrix} -2(y-x)^T & 2(y-x)^T \\ 0 & 2x^T \end{pmatrix}$$

   Die Matrix $\mathrm{d}f$ besitzt einen vollen Rang, und verschwindet nur für $k = (0,0)$, was genau unserem c entspricht.

3. Aus der Definition von M sieht man, dass $(0,0) \notin M$ und $f(x,y) = (0,0)$. Aus der Definition des regulären Wertes folgt nun, dass $c = (0,0)$ ein regulärer Wert ist

4. Aus dem Satz vom regulären Wert folgt, dass $M = f^{-1}(0)$ eine 4-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ist.

19.4.2 Tipp: Driton'sches Lemma 2

Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g > 0$. Definiere $f := \sqrt{g}$; dann gilt

(i) Kritischen Punkte von f = kritische Punkte von g

(ii) Minima von f = Minima von g

(iii) Maxima von f = Maxima von g

19.5 Extrema unter Nebenbedingungen: Lagrange-Multiplikator

1. Lese die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ welche optimiert (maximieren oder minimieren) werden sollte und die Nebenbedingung $g(x) = c$ ab.

2. *Zwischenbemerkung:* Die Lagrangefunktion ist definiert als $\Lambda(x,\lambda) := f(x) + \lambda \cdot \big(g(x) - c\big)$. Das Optimierungsproblems mit einer Nebenbedingung entspricht jetzt einem lokalen Extremum der Lagrangefunktion, welches über das folgende Gleichungssystem nach Lagrange bestimmt werden kann.

3. Stelle das folgende Gleichungssystem nach Lagrange auf:

$$\left.\begin{aligned} \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) &= 0 \\ g(x) &= 0 \end{aligned}\right|$$

   Beachte: In den meisten Fällen handelt es sich um ein *nichtlineares* Gleichungssystem

4. Bestimme zuerst λ

5. Löse das Gleichungssystem nach $x_1, \ldots, x_n$ auf. Die Lösung des Gleichungssystems ist die Extremalstelle k mit den Koordinaten $k_1, \ldots, k_n$

6. Werte f an der Stelle k aus, und beachte folgendes zum Ergebnis von $f(k)$:

   - k ist ein Minimum der Lagrangefunktion $\Longrightarrow$ $f(k)$ ist Minimum von f
   - k ist ein Maximum der Lagrangefunktion $\Longrightarrow$ $f(k)$ ist Maximum von f

   Beachte: $x^2 = c \iff x = \pm\sqrt{c} \implies f(\sqrt{c})$ ist ein Maximum der Funktion f und $f(-\sqrt{c})$ ist ein Minimum der Funktion f

Mehrere Nebenbedingungen Sei wieder $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Weiter seien s voneinander unabhängige Nebenbedingungen $g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, s$ vorgegeben; dann ist das Gleichungssystem nach Lagrange wie folgt definiert:

$$\left.\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{s} \nabla \lambda_i g_i(x) &= 0 \\ g_1(x) &= 0 \\ &\vdots \\ g_s(x) &= 0 \end{aligned}\right|$$

19.5.1 Beispiel: Grösstes Volumen eines in einem Ellipsoid einbeschriebenen Quaders

Man bestimme den achsenparallelen Quader grössten Volumens, der dem Ellipsoid

$$E := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

einbeschrieben ist.

1. Lese die zu maximierende Funktion und die Nebenbedingung ab:

   $f(x, y, z) = 8xyz$ (Volumen des Quaders)
   $\implies f$ ist zu maximierende Funktion
   $g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Nebenbedingung)

2. Stelle das Gleichungssystem nach Lagrange auf:

$$\left.\begin{aligned} 8yz &= \lambda \frac{2x}{a^2} \\ 8xz &= \lambda \frac{2y}{b^2} \\ 8xy &= \lambda \frac{2z}{c^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 &= 0 \end{aligned}\right|$$

   Es handelt sich hierbei um ein nichtlineares Gleichungssystem.

3. Löse das Gleichungssystem nach x, y, z auf, um die Extremstelle k zu bestimmen:

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}a}{3} \qquad y = \pm\frac{\sqrt{3}b}{3} \qquad z = \pm\frac{\sqrt{3}c}{3}$$

   Da wir am Maximum interessiert sind, ist k definiert als

$$k = (\frac{\sqrt{3}a}{3}, \frac{\sqrt{3}b}{3}, \frac{\sqrt{3}c}{3})$$

4. Werte f an der Stelle k aus um das gewünschte Maximum zu erhalten:

$$f(\frac{\sqrt{3}a}{3}, \frac{\sqrt{3}b}{3}, \frac{\sqrt{3}c}{3}) = 8\,\underline{\underline{\frac{abc}{3\sqrt{3}}}}$$

20 Mehrfache Integrale

20.1 Jordansche Nullmenge

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heisst *Jordansch Nullmenge* wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele offene Quadr $W_1, \ldots, W_n \in \mathbb{R}^n$ gibt, s.d.

$$A \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} W_\nu \quad \sum_{\nu=1}^{N} Vol_n(W_\nu) < \varepsilon$$

20.2 Jordan-messbar

Eine beschränkte Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ heisst *Jordan-messbar* wenn ihr Rand ∂B eine Jordansche Nullmenge ist

20.2.1 Eigenschaften Jordanscher Nullmengen

- Jede Jordansche Nullmenge ist beschränkt
- Jede endliche Vereinigung Jordanscher Nullmengen ist wieder Jordansche Nullmenge
- Ist $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine beschränkte Menge, so ist die Menge $A := B \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}$ eine Jordansche Nullmenge
- Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein achsenparalleler, offerne Quader. Dann ist ∂Q eine Jordansche Nullmenge
- Ist A Jordansche Nullmenge, dan ist auch ihr Abschluss $\overline{A}$ Jordansche Nullmenge

20.3 Eigenschaften Riemann-Integral

$B \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Teilmenge mit $\mathcal{P}(B) \neq \emptyset$ und $f, g : B \mapsto \mathbb{R}$ Riemann-Integrierbar

(i) $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}, |f|$ sind Riemann-Integrierbar

(ii) $|\int_B f| \leq \int_B |f| \leq ||f||\text{Vol}_n(B)$

20.4 Transformationssatz

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $\Phi\colon \Omega \to \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^d$ ein Diffeomorphismus. Dann ist die Funktion f auf $\Phi(\Omega)$ genau dann integrierbar, wenn die Funktion $x \mapsto f(\Phi(x)) \left|\det(\underbrace{d\Phi(x)}_{\text{Jacobi-Matrix}})\right|$

auf Ω integrierbar ist. In diesem Fall gilt:

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega} f(\Phi(x))\,|\det(D\Phi(x))|\,\mathrm{d}x$$

20.5 Wichtige Transformationen

20.5.1 Polarkoordinaten

$$f(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \ldots \cos\varphi_{n-1} \\ r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \ldots \cos\varphi_{n-1} \\ r\sin\varphi_2\cos\varphi_3 \ldots \cos\varphi_{n-1} \\ \vdots \\ r\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\ r\sin\varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathrm{d}f(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})) = |r| \cdot \prod_{k=2}^{n-1} \cos^{k-1}(\varphi_k)$$

Ellipsoid Jeder Eintrag des Vektors enthält ein Vorfaktor $a, b, c, \ldots$

Fall $n = 2$ Sei $I \subset [0,\infty)$ und $K(I) = \{x \in \mathbb{R} \mid ||x|| \in I\}$ die Kugelschale

$$\int_{K(I)} f(x_1,x_2)\ \mathrm{d}(x_1,x_2) = \int_I \int_{[-\pi;\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ r\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

Fall $n = 3$ Sei $I \subset [0,\infty)$ und $K(I) = \{x \in \mathbb{R} \mid ||x|| \in I\}$ die Kugelschale

$$\int_{K(I)} f(x)\ \mathrm{d}(x)$$

$$= \int_I \int_{[-\pi,\pi]} \int_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} f(P_3(r,\varphi,\psi))\ r^2 \cdot \cos\psi\ \mathrm{d}\psi\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

mit

$$P_3(r,\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi \\ r\sin\varphi\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

20.5.2 Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = r$$

$$\int_B f(x)\mathrm{d}x = \int_{[0;h]} \int_{[0;2\pi]} \int_{[0;R]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h) \cdot r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

20.6 Iterierte Integrale

$$\int\limits_C e^{y^2}\mathrm{d}(x,y), \quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \|\ |x| \leq |y| \leq 1\}$$

$$\implies -1 \leq |y| \leq 1, \quad -|y| \leq |x| \leq |y|$$

$$\implies \int\limits_C e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^{-1} \int\limits_{-|y|}^{|y|} e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \underbrace{\int\limits_0^1 \int\limits_{-y}^{y} e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{0\leq y\leq 1 \implies |y|=y} + \underbrace{\int\limits_0^{-1} \int\limits_{y}^{-y} e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{-1\leq y<0 \implies |y|=-y}$$

20.7 Schwerpunkt

Im Existenzfall ist der Schwerpunkt $S = (s_1,\ldots,s_n)$ definiert durch die Koordinaten

$$s_j := \frac{1}{\mathrm{Vol}_n(K)} \int\limits_K x_j\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

21 Integration über Untermannigfaltigkeiten

21.1 Volumenelement

21.1.1 Länge einer Kurve

Sei $\gamma \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$; dann ist γ rektifizierbar und es gilt

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|$$

21.1.2 Volumen eines Parallelepipeds

$$\mu_d(A) = \sqrt{\det(A^TA)}$$

21.2 Gramm'sche Determinante

$$g^\psi(x) := \det(\underbrace{\psi'(x)^T \cdot \psi'(x)}_{\text{Masstensor von } \psi \text{ in } x})$$

21.3 Integral über ein Kartengebiet

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einer d-dimensionalen C^1-Untermannigfaltigkeit M. Sei $\psi : V \to M \cap U$ eine Parametrisierung und $M \cap U$ ein Kartengebiet; dann ist

$$\int\limits_{M\cap U} f\mathrm{d}S = \int\limits_V f(\psi(x))\sqrt{g^\psi(x)}\mathrm{d}x$$

das Integral von f über das Kartengebiet $M \cap U$

21.3.1 d-dimensionaler Flächeninhalt

Ist die Funktion 1 über $M \cap U$ integriertbar, so heisst der Wert des Integrals

$$v_d(M \cap U) := \int\limits_{M\cap U} 1 \cdot \mathrm{d}S = \int\limits_V \sqrt{g^\psi(x)}\mathrm{d}x$$

d-dimensionaler Flächeninhalt oder auch *d-dimensionales Volumen* von $M \cap U$.

21.4 Integration über einen Graphen

Es sei $h \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$ eine Funktion auf einer offenen Menge $\gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$, Γ_h ihr Graph und $\psi : \Omega \to \Gamma_h$ die Parameterdarstellung

$$\psi(x) := \begin{pmatrix} x \\ h(x) \end{pmatrix} \qquad x \in \Omega$$

Für die Gramm'sche Determinante gilt dann

$$\sqrt{g^{\psi}(x)} = \sqrt{1 + \|\nabla h(x)\|^2}$$

Das Integral einer Funktion f über den Graphen Γ_h berechnet sich durch

$$\int\limits_{\Gamma_h} f \mathrm{d}S = \int\limits_{\Omega} f(x, h(x)) \cdot \sqrt{1 + \|\nabla h(x)\|^2} \mathrm{d}x$$

21.4.1 Flächeninhalt des Graphen Γ_h

$$v_{n-1}(\Gamma_h) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \|\nabla h(x)\|^2} \mathrm{d}x$$

21.5 Wichtige Parametrisierungen

21.5.1 Volumentrick

Wird die lineare Abbildung $f :^n \to^m$ durch eine $m \times n$ Abbildungsmatrix A repräsentiert und $S \subseteq^n$ eine messbare Teilmenge, dann gilt

$$\mathrm{Vol}(f(S)) = |\det A| \, \mathrm{Vol}(S)$$

Beispiel Siehe Parametrisierung für Ellipsoid

21.5.2 2-Sphäre

Dies ist die Oberfläche der 3-dimensionalen Kugel
$S_r^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ||x - z|| = r\} \quad z \in \mathbb{R}^3$
Parametrisierung:

$$\gamma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

mit $\quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{g^{\gamma}(\theta, \varphi)} = r^2 \cos(\varphi)$$

Merke: diese Parametrisierung ist für die geschlitzte Sphäre $S_r^2 \setminus A$ mit $A := \{(x, 0, z) \in S_r^2 \mid x <= 0\}$ (Meridian), wobei A eine *Jordan Nullmenge* ist.

21.5.3 Halbsphäre

Dies ist die Oberfläche einer halben 3-dimensionalen Kugel
$S_+^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ||x|| = 1, z \geq 0\}$
Parametrisierung:

$$\gamma : [0,1] \times [0, 2\pi] \to S_+^2$$

$$(r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \sqrt{1 - r^2} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{g^{\gamma}(r, \varphi)} = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}$$

21.5.4 Thorus

Algebraische Gleichung für $R > r > 0$:

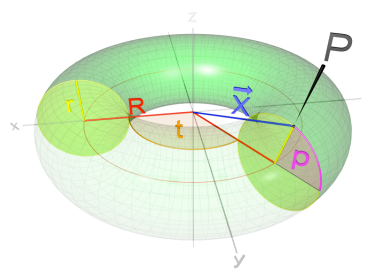
$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2$$

Mögliche Parametrisierung:

$$\gamma(t, p) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r \cdot \cos(p))\cos(t) \\ (R + r \cdot \cos(p))\sin(t) \\ r \cdot \sin(p) \end{pmatrix}$$

mit $\quad (0 \leq r \leq a) \quad 0 \leq p \leq 2\pi \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\sqrt{g^{\gamma}(t, p)} = rR + r^2 \cos(p)$$



21.5.5 Paraboloid

Algebraische Gleichung:

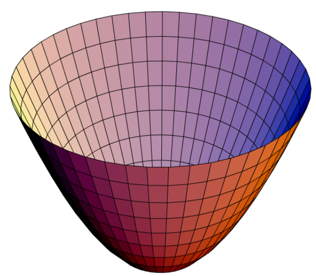
$$x^2 + y^2 = z, \qquad 0 \leq z \leq 1$$

Mögliche Parametrisierung:

$$\gamma(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r^2 \end{pmatrix}$$

mit $\quad 0 \leq r \leq 1 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\sqrt{g^{\gamma}(r, \varphi)} = r\sqrt{1 + (z'(r))^2} = r\sqrt{1 + 4r^2}$$



21.5.6 Ellipsoid

$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ wobei a, b, c die Halbachsen (vom Ursprung entlang der Achsen bis zum Rand von E) sind
Parametrisierung:

$$\gamma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} \cos\varphi \sin\theta \\ \sqrt{b} \sin\varphi \sin\theta \\ \sqrt{c} \cos\theta \end{pmatrix}$$

Diese Parmetrisierung erhält man aus den Kugelkoordinaten; es gilt:

$$\mathrm{Vol}(E) = f(S) = \det \left| \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{pmatrix} \right| \cdot \mathrm{Vol}(S)$$

S: Sphäre

$E = f(S)$: Lineare Abbildung, die eine Kugel S in ein Ellipsoid E transformiert

A: Abbildungsmatrix der linearen Abbildung f

Herleitung der Abbildungsmatrix A $E = \{\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \leq r\} \overset{\text{Subst.}}{\Longrightarrow} \tilde{B} = \{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \leq r\}$. Dabei wurde folgende Substitution verwendet

$$\tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{a}} x \Longleftrightarrow \sqrt{a}\tilde{x} = x \quad x \in K, \tilde{x} \in E$$
$$\Longleftrightarrow (1,0,0) \mapsto (\sqrt{a}, 0, 0)$$

Beschreibung von $x = \sqrt{a}\tilde{x}$ in Bezug auf $f(S)$: Wir nehmen einen Punkt x auf der Sphäre S und verformen diesen, so dass er auf dem Ellipsoid E landet. A sieht also wie folgt aus:

$$A = \mathrm{diag}(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$$

21.5.7 Allgemeine Rotationsfläche

$$R_r := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2(z),\ z \in I\}$$
$$N := \{(x,y,z) \in R_r \mid x = r(z), y = 0\} \quad \text{(Nullmeridian)}$$

$R_r \setminus N$ besitzt die Parametrisierung

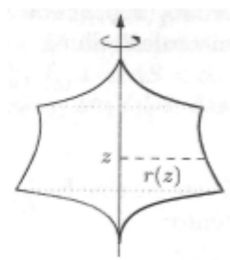
$$\gamma(z, \varphi) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(z)\cos(\varphi) \\ r(z)\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

mit $z \in I^\circ \setminus A, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\sqrt{g^\gamma(z,\varphi)} = r(z)\sqrt{1 + (r'(z))^2}$$

Daraus ergibt sich eine **Formel** für die **Rotationsfläche** :

$$\boxed{v_2 R_r = 2\pi \int_I r(z)\sqrt{r'^2(z)}\ \mathrm{d}z}$$



21.5.8 Tipp: Parametrisierung

$x^2 + y^2 \leq r$ bedeutet, dass r sich verändert und in die Parametrisierung als Variable miteinbezogen werden sollte ($r \in [a,b]$) und deshalb über $f(\Psi(r, \dots))\mathrm{d}r\mathrm{d}\dots$ integriert werden sollte. $x^2 + y^2 = r$ stattdessen bedeutet, dass r ein fester Wert ist und deshalb *nicht* darüber integriert werden sollte.

21.6 Vorgehen: Integration über Untermannigfaltigkeiten und Graphen

Folgende Aufgabentypen sind zu unterscheiden:

- Berechne die Oberfläche einer *Menge* L. Unterscheide dabei folgende Fälle:
  - Bei L handelt es sich um eine Untermannigfaltigkeit

$$\Longrightarrow v_d(L) := \int_L 1 \cdot \mathrm{d}S = \int_V \sqrt{g^\psi(x)}\mathrm{d}x$$

  - Bei L handelt es sich um einen Graphen G einer Funktion $f : M \to X$, wobei M eine Untermannigfaltigkeit ist

$$\Longrightarrow v_d(M) := \int_M 1 \cdot \mathrm{d}S$$
$$= \int_\Omega 1 \cdot \sqrt{1 + \|h(x)\|^2}\mathrm{d}x$$
$$= \int_V \sqrt{g^\psi(x)}\mathrm{d}x$$

$$\text{mit } \psi = \begin{pmatrix} x \\ \boldsymbol{h(x)} \end{pmatrix}$$

- Berechne das Integral der Form $\int_K f(x)\mathrm{d}S$ über eine *Menge* K. Unterscheide dabei folgende Fälle:
  - Bei K handelt es sich um eine Untermannigfaltigkeit

$$\Longrightarrow \int_K f\mathrm{d}S = \int_V f(\psi(x))\sqrt{g^\psi(x)}\mathrm{d}x$$

  - Bei K handelt es sich um einen Graphen:

$$\Longrightarrow \int_K f\mathrm{d}S = \int_M 1\cdot\mathrm{d}S$$

$$= \int_\Omega f(x,h(x))\cdot\sqrt{1+\|\nabla h(x)\|^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_V f(\psi(x))\sqrt{g^\psi(x)}\mathrm{d}x$$

mit $\psi = \begin{pmatrix} x \\ \boldsymbol{h(x)} \end{pmatrix}$

21.6.1 Beispiel: Oberfläche eines Graphen berechnen

Berechne die Oberfläche des Graphen der Funktion

$$f : \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = 1+\cosh(\sqrt{x^2+y^2})$$

1. Wähle eine Parametrisierung ψ wie folgt:

$$\psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 1+\cosh(r) \end{pmatrix} \qquad r\leq 1, \quad \varphi\in[0,2\pi]$$

2. Berechne die Gramm'sche Determinante und ziehe die Wurzel:

$$\sqrt{g^\psi(x)} = r\cosh(r)$$

3. Rechne das Oberflächenintegral des Graphen aus:

$$\int_G f(x,y)\mathrm{d}S = \int_V \sqrt{g^\psi(x)}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cosh(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \underline{\underline{2\pi(\sinh(1)-\cosh(1)-1)}}$$

21.7 Der Integralsatz von Gauss

Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge mit einem stetig differenzierbarem Rand, das heisst $\partial\Omega$ sei eine C^1-Untermannigfaltigkeit. Sei $\nu : \partial\Omega\to\mathbb{R}^n$ das äussere Einheitsnormalenvektorfeld an $\partial\Omega$; dann gilt für die Funktion $f\in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x)\mathrm{d}V(x) = \int_{\partial\Omega}\langle f(x),\nu(x)\rangle\mathrm{d}S(x)$$

$$\text{mit}\quad \operatorname{div} f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

22 Sonstiges

22.1 Körper: Volumen und Oberflächen

22.1.1 Kreis

Fläche

$$A = \pi r^2$$

Umfang

$$U = 2\pi r$$

22.1.2 Kugel

Volumen

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Oberfläche

$$O = 4\pi r^2$$

22.1.3 Zylinder

Volumen

$$V = G\cdot h$$

G: Grundfläche; ist meistens Kreis: $G=\pi r^2$

h: Höhe

Oberfläche

$$O = U\cdot h + 2\cdot G$$

G: Grundfläche; Kreisfläche: $G=\pi r^2$

h: Höhe

U: Umfang der Grundfläche; Kreisumfang: $U=2\pi r$

22.2 Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k}\frac{n+1-j}{j} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

22.3 Betragsfunktion

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

22.4 Euklidischer Abstand zu einem Punkt

Der euklidische Abstand zu einem Punkt $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ ist definiert durch

$$\sqrt{(x-q_1)^2 + (x-q_2)^2 + \cdots + (x-q_n)^2}$$

22.5 Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

22.6 Quadratische Ergänzung

1. $y = ax^2 + bx + c$
2. $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$
3. $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$
4. $y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$
5. $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} + c$