Analysis III Zusammenfassung

Herbstsemester 2012

Giuseppe Accaputo

Rechnergestützte Wissenschaften, B.Sc.

ETH Zürich

Typen von PDG

- $\boldsymbol{u_{tt} + u_{xx} = f(x) + g(t)}$
  - $u(t,x) = u_{\text{partikulär}}(x,t) + u_{\text{homogen}}(x,t)$
  - Verwende Separationsansatz mit $u(t,x) = v(t) + w(x)$:

$$\begin{aligned} v_{tt} + u_{xx} = v_{tt} = g(t) \\ w_{tt} + w_{xx} = w_{xx} = f(x) \end{aligned}$$

  - Wenn nur eine partikuläre Lösung benötigt wird, kann man bspw. alle Konstanten C_i gleich 0 setzen
- $\boldsymbol{u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0}$ **(Normalwellengleichung)** mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} & u(x,0) = f(x) \\ & u_t(x,0) = g(x) \\ & x \in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

  - Verwende die Formel von d'Alembert für die Lösung $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\mathrm{d}s$$

- $\boldsymbol{u_{xy} + u_x = 0}$
  - Verwende Substitution $v := u_x$
    1. Die PDG lautet neu

$$v_y + v = 0$$

    2. Anhand der Separation der Variablen erhalten wir

$$v(y) = ce^{-y}$$

    3. Rücksubstitution und Variation der Konstanten liefert

$$u_x(x,y) = C(x)e^{-y}$$

    4. Für die Lösung von u folgt nun

$$\underline{\underline{u(x,y) = e^{-y}\int c(x)\mathrm{d}x + D(y) = e^{-y}C(x) + D(y)}}$$

- **Cauchy Problem:**

$$\begin{cases} \text{PDG:} & a(x,y,u(x,y)) \cdot u_x + b(x,y,u(x,y)) \cdot u_y = c(x,y,u(x,y)) \\ \text{AB:} & u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s) \end{cases}$$

  - Verwende Methode der Charakteristiken
    1. Bestimme die Charakteristiken indem das folgende System von linearen DGL gelöst wird (genannt *charakteristische Gleichungen*):

$$\begin{aligned} x(t,s)_t &= a(x,y,u(x,y)) \\ y(t,s)_t &= b(x,y,u(x,y)) \\ z(t,s)_t &= c(x,y,u(x,y)) \quad \text{(auch } u(t,s) \text{ möglich)} \end{aligned}$$

    2. Bestimme die Konstanten anhand der angegebenen Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x(0,s) &= x_0(s) \\ y(0,s) &= y_0(s) \\ z(0,s) &= u_0(s) \end{aligned}$$

    3. Verwende die Charakteristiken um t, s durch x, y auszudrücken
    4. Die Lösung lautet $u(x,y) = z(t(x,y), s(x,y))$
  - Wertebereich von x, y
    * Der Wertebereich von x, y (oder t, s) kann über die Angaben zu t, s (oder x, y) in den Anfangsbedingungen und der Lösung $u(x,y)$ bestimmt werden. Wichtig: x zeigt auf t und y auf s, da $u(x,y) = u(t(x,y), s(x,y))$ gilt.

      Beispiel: Sei die Anfangsbedingung $y(0,s) = sin(s)$ mit $s \in [0, \pi]$ gegeben (zu t wird keine Aussage gemacht). Da $\sin(s) \geq 0 \quad \forall s \in [0, \pi]$ folgt sofort $y \geq 0$ und da für t keine Restriktionen definiert wurden in den Anfangsbedingungen gilt $x \in \mathbb{R}$. Die Lösung lautet $u(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ daher ist u im Gebiet $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ (x,y) \neq 0\}$ eindeutig definiert.

- $\boldsymbol{u_y + F(u)_x = 0}$ **(Erhaltungssatz)** mit den Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, x \leq \alpha \\ u_r, x > \alpha \end{cases}$$
$$\alpha \in \mathbb{R}$$

  - **Fall 1**: $u_l \neq u_r \wedge u_l \nless u_r$
    * Es handelt sich um eine Stosswelle und es gilt:

$$u(x,y) = \begin{cases} u_l, x \leq \gamma(y) \\ u_r, x > \gamma(y) \end{cases}$$

    * Die Stossfront $\gamma(y)$, an welcher sich die Charakteristiken schneiden berechnet sich durch

$$\gamma(y)_y = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r}$$
$$\text{AB: } \gamma(0) = \alpha$$
$$\Longrightarrow \int \gamma(y)_y \, \mathrm{d}y = \int \ldots$$

      Verwende AB um Integrationskonstante zu bestimmen

  - **Fall 2**: $u_l < u_r$

* Es handelt sich um eine Verdünnungswelle und es gilt:

$$u(x,y) = \begin{cases} u_l & x \geq F'(u_l)y \\ (F(\frac{x}{y})')^{-1} & F'(u_l)y < x \leq F'(u_r)y \\ u_r & x > F'(u_r)y \end{cases}$$

- **Beliebige PDG mit <u>inhomogenen</u> Randbedingungen**

$$\begin{aligned} &u(0,t) = a \\ &u(L,t) = b \\ &a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Bestimme die von t unabhängige stationäre Lösung $u^*(x)$ der gegebenen PDG. Setze dazu $u*(x)$ in die PDG ein und löse die neue PDG ($u_t^* = u_{tt}^* = 0$ da unabhängig von t)
2. Verwende nun den Ansatz $u(x,t) = v(x,t) + u^*(x) \iff v(x,t) = u(x,t) - u^*(x)$ und definiere das Problem neu (PDG, Randbedingungen, Anfangsbedingungen)
   - *Kontrolle:* Nach der Neudefinition sollten die Randbedingungen homogen sein

PDG und Separationsansatz

- Verwende den Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ für folgende PDG:
  - $u_t = Du_{xx}$
  - $u_t = u_{xx} + \alpha u_x$
  - $u_{tt} = 4u_{xx}$

Klassifikation

- **Linear**: Nur $u, u_x, u_y, \ldots$
  Beispiel (Laplace Gleichung): $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$
- **Semilinear**: $u\cdot$ etwas
  Beispiel: $u_t - 6uu_x + u_{xx} = 0$
- **Quasilinear**:

Lineare PDG zweiter Ordnung in zwei Variablen

Klassifikation

$$L[u] = au_{xx} + \mathbf{2}bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$$

Bemerkung: a, b, c, d, e, f können Funktionen von x und y sein

Diskriminante

$$D = b^2 - ac$$

Einordnung

Diskriminante D	Typ	Normalform	Bemerkung
>0	hyperbolisch	$w_{rs} + L_1(w) = G(r,s)$	Braucht AB und evtl. RB
$=0$	parabolisch	$w_{rr} + L_1(w) = G(r,s)$	Braucht RB und AB
<0	elliptisch	$w_{rr} + w_{ss} + L_1(w) = G(r,s)$	Braucht RB

L_1 ist der Differentialoperator erster Ordnung. Dies bedeutet, dass an dieser Stelle am Schluss w_r und/oder w_s stehen sollten.

Normalform, Koordinatentransformation

Allgemeine Transformation

$$\begin{aligned} x &= x(r,s) \\ y &= y(r,s) \\ u(x(r,s), y(r,s)) &= w(r,s) \end{aligned}$$

Lineare Transformation

$$\begin{aligned} r(x,y) &= ax + by \\ s(x,y) &= cx + dy \\ ad - bc &\neq 0 \text{ (Determinante ungleich null)} \end{aligned}$$

Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x(r,\varphi) &= r\cos(\varphi) \\ y(r,\varphi) &= r\sin(\varphi) \\ r &= \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Familien von Charakteristiken

Wird reelle Transformation verlangt, so kann man die folgenden Familien der Charakteristiken verwenden (siehe Beispiel in Kapitel zu Beispielen):

$$\frac{\mathrm{d}y_\pm}{\mathrm{d}x} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

Wichtige DGLs

- $\ddot{X}(x) = 0 \implies \underline{\underline{X(x) = Ax + B}}$
  - Bemerkung: Diese Lösung liefert nur die triviale Lösung $A = B = 0$ für homogene Randbedingungen und ist daher in den meisten Fällen uninteressant
- $\dot{X}(x) = X(x) \implies \underline{\underline{X(x) = c_1 e^x}}$
  - Herleitung: $\dot{X}(x) = X(x) \iff \int \frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x} / X(x) \mathrm{d}x = \int 1 \mathrm{d}x \iff \ln(X(x)) = x + c_1 \iff X(x) = e^{c_1 + x} \iff X(x) = e^{c_1} \cdot e^x \iff \underline{X(x) = c_2 e^x}$

- $\ddot{X}(x) = \lambda X(x)$
  - Fall $\lambda = -\omega^2 < 0 \implies \underline{\underline{A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) = Ce^{\mathrm{i}\omega x} + De^{-\mathrm{i}\omega x}}}$
    * Mit homogenen Randbedingungen erhalten wir $A = 0$ und $B \neq 0$ mit $\omega k = n\pi$ wobei k aus der homogenen Randbedingung $u(x = L, t) = 0$ stammt.
  - Fall $\lambda = \omega^2 > 0 \implies \underline{\underline{A\cosh(\omega x) + B\sinh(\omega x) = Ce^{\omega x} + De^{-\omega x}}}$
    * Bemerkung: Diese Lösung liefert nur die triviale Lösung $A = B = 0$ für homogene Randbedingungen und ist daher in den meisten Fällen uninteressant
- $a\ddot{X}(x) + b\dot{X}(x) + cX(x) = 0, \quad a \neq 0$. Das charakteristisches Polynom lautet: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Seien $\lambda_{1,2}$ die Nullstellen des Polynoms; dann gilt:
  - $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies \underline{\underline{X(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}}$
  - $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 = \lambda_2 \implies \underline{\underline{X(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda_1 x}}}$
  - $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta, \beta \neq 0 \implies \underline{\underline{X(x) = (c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x))e^{\alpha x}}}$
- $x^2\ddot{X}(x) + x\dot{X}(x) - n^2 X(x) = 0$ (Eulersche DGL)
  - Falls $n = 0$ möglich ist muss man die DGL für die Fälle $n = 0$ und $n \neq 0$ lösen
    * Fall $n \neq 0 \implies$ Ansatz: $X(x) = Kx^\alpha, \quad K =$ const.
    * Fall $n = 0 \implies$
- $\ddot{X}(x) + \frac{1}{x}\dot{X}(x) - \frac{n^2}{x^2}X(x) = 0$
  - Ansatz: $g(x) = xX(x)$

Normalform durch lineare Koordinatentransformation

Aufgabe: Bringe die Gleichung

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0$$

durch eine lineare Koordinatentransformation auf ihre Normalform

1. Lineare Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} r(x, y) &= ax + by \\ s(x, y) &= cx + dy \end{aligned}$$

   mit der Bedingung, dass $ad - bc \neq 0$ gelten muss (Determinante!)

2. Diskriminante $D = b^2 - ac = 4 > 0 \implies$ hyperbolische PDG

3. Es gilt $w(r(x, y), s(x, y)) = u(x(r, s), y(r, s))$, also:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w(r(x, y), s(x, y)) \overset{\text{Kettenregel}}{=} w_r \frac{\mathrm{d}r(x, y)}{dx} + w_s \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = aw_r + cw_s \\ u_{xx} &= a^2 w_{rr} + 2ac w_{rs} + c^2 w_{ss} \\ u_{xy} &= ab w_{rr} + (ad + bc) w_{rs} + cd w_{ss} \end{aligned}$$

4. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} &u_{xx} + 4u_{xy} + u_x \\ &= aw_r + cw_s + (2ac + 4ad + 4bc) w_{rs} + a(a + 4b) w_{rr} + c(c + 4d) w_{ss} \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

5. Die Normalform für die hyperbolische PDG lautet $w_{rs} + L_1(w) = 0$, also müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned} &c(c + 4d) = 0 \\ &a(a + 4b) = 0 \\ &2ac + 4ad + 4bc = 1 \\ &(a \neq 0 \wedge c = 0) \vee (a = 0 \wedge c \neq 0) \text{ (Linearer Differentialoperator)} \end{aligned}$$

6. Wir wählen $c = 0, 4ad = 1, a = -4b$

7. Eingesetzt in die Determinante erhalten wir $ad - bc = \frac{1}{4} \neq 0$

Reelle Normalform durch Koordinatentransformation

Aufgabe: Bringe die Gleichung

$$u_{xx} - xu_{yy} = 0 \qquad x > 0$$

auf ihre reelle Normalform

1. Diskriminante $D = 0 - (-x) = x > 0 \implies$ hyperbolische PDG
2. Verwende die Familie der Charakteristiken:
$$\frac{\mathrm{d}y_\pm}{\mathrm{d}x} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \pm\sqrt{x}$$
3. Nun können wir integrieren:
$$\int \mathrm{d}y_+ = \int \sqrt{x}\mathrm{d}x \implies y = \frac{2x^{3/2}}{3} + c1 \iff y - \frac{2x^{3/2}}{3} \equiv \text{ const.}$$
$$\int \mathrm{d}y_- = \int -\sqrt{x}\mathrm{d}x \implies y = -\frac{2x^{3/2}}{3} + c2 \iff y + \frac{2x^{3/2}}{3} \equiv \text{ const.}$$
4. Verwende nun den Ansatz:
$$r(x,y) = y - \frac{2x^{3/2}}{3} \quad (1)$$
$$s(x,y) = y + \frac{2x^{3/2}}{3} \quad (2)$$
5. Berechne die notwendigen Ableitungen u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy} und beachte das weiterhin $u(x(r,s), y(r,s)) = w(r(x,y), s(x,y))$
6. Wir erhalten also:
$$0 = u_{xx} - xu_{yy} = -4xw_{rs} + \frac{x}{2}(w_s - w_r)x^{-3/2}$$
7. Wir lösen das Gleichungssystem aus dem vorherigen Schritt auf und erhalten:
$$(1) + (2) \implies x^{3/2} = \frac{3}{4}(s - r) \quad (3)$$
8. Wir können nun (3) in die PDG einsetzen und erhalten
$$w_{rs} + \frac{1}{6(r-s)}(w_s - w_r) = 0$$

Allgemeine Form der Lösungen der PDG $u_{tt} = u_{xx}$

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Form der Lösungen der PDG

$$u_{tt} = u_{xx}$$

mit den Randbedingungen $u(0,t) = 0$ und $u(\pi, t) = 0$

1. Separationsansatz: $u(x,t) = X(x)T(t)$
2. Aus dem Ansatz folgt
$$\ddot{T}(t)X(x) = \ddot{X}(x)T(t) \Longleftrightarrow \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \alpha \equiv \text{ const.}$$
3. Wir erhalten folgendes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen
$$\begin{cases} \ddot{T}(t) = \alpha T(t) \quad (1) \\ \ddot{X}(x) = \alpha X(x) \quad (2) \end{cases}$$
4. Uns interessiert der Fall $\alpha = -\omega^2 < 0$ da wir für den Fall $\alpha = \omega^2$ nur die triviale Lösung erhalten. Es handelt sich bei beiden Gleichungen um harmonische Oszillatoren, also erhalten wir für die Lösungen
$$\begin{cases} T(t) = A\cos(\omega t) + B\cos(\omega t) X(x) = C\cos(\omega t) + D\cos(\omega t) \end{cases}$$
5. Wir verwenden nun die Randbedingungen um die Konstanten zu bestimmen und erhalten ein Gleichungssystem bestehend aus zwei Gleichungen:
$$\begin{cases} u(0,t) = X(0)T(t) = C(A\cos(\omega t) + B\cos(\omega t)) \stackrel{!}{=} 0 \\ u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = -C(A\cos(\omega t) + B\cos(\omega t)) \stackrel{!}{=} 0 \end{cases}$$
Das Gleichungssystem ist genau dann erfüllt wenn $C = 0$ ist.
6. Wir setzen $\omega = n$ und erhalten für die allgemeine Lösung
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(nt) + B_n \cos(nt)\right) D_n \sin(nx)$$
7. Die Konstante D_n können wir einschmelzen lassen und erhalten vereinfacht:
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(K_n \cos(nt) + L_n \cos(nt)\right) \sin(nx)$$

PDG mit inhomogenen Randbedingungen (Serie 4)

Aufgabe: Folgendes Problem sei gegeben:

$$\begin{aligned}\text{PDG: } & u_t = Du_{xx} \quad 0 < x < L \\ \text{RB: } & u(0,t) = u_0, \quad u(L,t) = u_1 \\ \text{AB: } & u(x,0) = f(x)\end{aligned}$$

1. Stationäre Lösung bestimmen

Wir bestimmen nun die stationäre Lösung $u^*(x)$ und setzen ein:

$$u_t^* = Du_{xx}^* \Longleftrightarrow 0 = Du_{xx}^* \Longleftrightarrow 0 = u_{xx}^* \implies u^*(x) = Ax + B$$

Aus den Randbedingungen folgt für $u^*(x)$

$$\begin{aligned}u(0,t) = u^*(0) &\implies u_0 = B \\ u(L,t) = u^*(L) &\implies \frac{u_1 - u_0}{L} = A \\ &\implies \underline{\underline{u^*(x) = \frac{u_1 - u_0}{L}x + u_0}}\end{aligned}$$

2. Transformation: Problem mit inhomogenen Randbedingungen neu definieren

Wir verwenden den nun Ansatz $v(x,t) = u(x,t) - u^*(x)$.

1. Für die PDG erhalten wir neu
$$v_t = Dv_{xx}$$
2. Für die Randbedingungen erhalten wir neu
$$v(0,t) = u(0,t) - u^*(0) = 0 \qquad v(L,t) = u(L,t) - u^*(L) = 0$$
3. Für die Anfangsbedingung erhalten wir neu
$$v(x,0) = u(x,0) - u^*(x) = f(x) - u^*(x)$$

PDG zweiter Ordnung, Laplace, Koordinatentransformation (Serie 7)

Aufgabe: Sei $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 4(=r^2)\}$ Finde die Lösung u von

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \quad (x,y) \in \Omega \\ &u(x,y) = y \quad (x,y) \in \partial\Omega \\ &\lim_{x^2+y^2\to\infty} u(x,y) = 0 \end{aligned}$$

1. Wir führen die Transformation $w(r,\varphi) = u(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ durch mit $r = 2 = \sqrt{x^2+y^2}$ (aus Definition von Ω wissen wir $r^2 = 4$). Das Problem lautet neu

$$\begin{aligned} &w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w = 0 \quad (r,\varphi) \in (4,\infty) \times [0,2\pi) \\ &RB : w(2,\varphi) = 2\sin(\varphi) \quad \varphi \in [0,2\pi) \\ &\lim_{r\to\infty} u(r,\varphi) = 0 \end{aligned}$$

2. Ansatz: $w(r,\varphi) = R(r)F(\varphi)$
$\implies F(\varphi)\ddot{R}(r) + \frac{1}{r}\dot{R}(r)F(\varphi) + \frac{1}{r^2}F''(\varphi)R(r) = 0$
$\implies \begin{cases} F''(\varphi) = \lambda F(\varphi) \\ r^2\ddot{R}(r) + r\dot{R}(r) + \lambda R(r) = 0 \end{cases}$

3. Bestimme $F(\varphi)$ indem wir nur $\lambda = -\omega^2 < 0$ betrachten, da die Randbedingung $w(2,\varphi) = 2\sin(\varphi)$ verlangt. Wir erhalten also vorerst

$$F(\varphi) = A\sin(\omega\varphi) + B\cos(\omega\varphi)$$

Ein Koeffizientenvergleich mit $w(2,\varphi) = R(2)F(\varphi) = R(2)(A\sin(\omega\varphi) + B\cos(\omega\varphi)) = 2\sin(\varphi)$ liefert $B = 0$ und $\omega = 1 \implies \lambda = -1$ also erhalten wir

$$\underline{F(\varphi) = A\sin(\varphi)}$$

4. Da $\lambda(=-1) < 0$ müssen wir beim Lösen der Eulerschen DGL nur den Fall $\lambda \neq 0$ betrachten und verwenden daher den Ansatz $R(r) = r^\alpha$. Einsetzen in die Eulersche DGL ergibt

$$[\alpha(\alpha-1) + \alpha - 1]r^\alpha = 0 \iff \alpha = \pm 1 \implies \underline{R(r) = Cr^1 + Dr^{-1}}$$

5. Die Bedingung $\lim_{r\to\infty} w(r,\varphi) = (Cr^1 + Dr^{-1}) \cdot A\sin(\varphi) \overset{!}{=} 0$ ist genau dann erfüllt, wenn $C = 0$ ist und D kann beliebig gewählt werden.

6. Für die allgemeine Lösung $w(r,\varphi)$ folgt also $w(r,\varphi) = A\sin(\varphi) \cdot \frac{D}{r}$. Ein Koeffizientenvergleich mit $w(2,\varphi) = 2\sin(\varphi) = A\sin(\varphi) \cdot \frac{1}{2}$ liefert $A = 2$ (wähle $D = 1$, da beliebig wählbar) und die Lösung lautet

$$\underline{\underline{w(r,\varphi) = 4\sin(\varphi) \cdot \frac{1}{r}}} \overset{\text{(Rücktrafo)}}{\implies} \underline{\underline{u(x,y)\frac{4y}{x^2+y^2}}}$$

PDG zweiter Ordnung, Suche nach harmonischer Funktion auf gegebenem Gebiet mit Randbedingung

Aufgabe: Suche eine in der Kreisscheibe $\{(x,y) : x^2+y^2<6\}$ harmonische Funktion, welche auf $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 6\}$ stetig ist und die Randbedingung $u(x,y) = y + y^2$ erfüllt

1. Wir suchen also eine Funktion $u(x,y)$ welche $\Delta u = 0$ erfüllt (harmonische Funktion)

2. Führe Koordinatentransformation durch $w(r,\varphi) = u(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ und wir erhalten neu

$$\Delta u = w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_{\varphi\varphi} = 0$$
$$\text{RB: } w(r=\sqrt{6},\varphi) = r\sin(\varphi) + r^2\sin(\varphi) = \sqrt{6}\sin(\varphi) + 3 - 3\cos(2\varphi)$$

3. Wir verwenden nun den Separationsansatz $w(r,\varphi) = R(r)F(\varphi)$ und erhalten

$$F(\varphi)\left[\ddot{R}(r) + \frac{1}{r}\dot{R}(r)\right] + \frac{1}{r^2}R(r)F^{''}(\varphi) = 0$$
$$\implies \begin{cases} r^2\ddot{R}(r) + r\dot{R}(r) = -\lambda R(r) = 0 \\ \ddot{F}(\varphi) = \lambda F(\varphi) \end{cases}$$

4. Wir bestimmen $F(\varphi)$. Da wir die Bedingung $F(0) = F(2\pi)$ erfüllen müssen und diese nur von $\cos, \sin$ erfüllt wird, wählen wir $\lambda = -\omega^2 < 0$ und erhalten $F(\varphi) = A\cos(\omega\varphi) + B\sin(\omega\varphi)$. Aus der Bedingung $F(0) = F(2\pi)$ erfahren wir, dass wir $\omega \in \mathbb{N}$ wählen müssen, da ansonsten die Periodizität nicht erfüllt ist und wählen $\omega = n$. Wir erhalten

$$\underline{F(\varphi) = A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)}$$

5. Nun bestimmen wir $R(r)$. Da wir aus dem vorherigen Schritt wissen, dass $\lambda \neq 0$ gilt hat die zweite DGL die Form der Eulerschen DGL und diese lösen wir mit dem Ansatz $R(r) = Kr^\alpha$. Einsetzen liefert $(\alpha(\alpha-1)+\alpha) = -\lambda \iff \alpha^2 = \sqrt{\omega^2} \iff \alpha = n \implies \underline{R(r) = C_n r^n}$

6. Wir verwenden nun den Superpositionsansatz $w(r,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}(A_n\sin(n\varphi) + B_n\cos(n\varphi))r^n$

7. Der Koeffizientenvergleich mit der Randbedingung liefert $w(r,\varphi) = \sqrt{6}\sin(\varphi) + 3 - 3\cos(2\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin(n\varphi) + B_n\cos(n\varphi))r^n \implies A_1 = 1, B_2 = -\frac{1}{2}, B_0 = 3, A_n = B_n = 0$

8. Die Lösung lautet also

$$\underline{\underline{w(r,\varphi) = 3 + r\sin(\varphi) - \frac{1}{2}r^2\cos(2\varphi)}} \overset{\text{(Rücktrafo)}}{\implies} \underline{\underline{u(x,y) = 3 + y - \frac{1}{2}(x^2-y^2)}}$$

PDG zweiter Ordnung, Laplaceoperator, Radialsymmetrischer Ansatz

Aufgabe: Man löse die Gleichung $u_{xx}+u_{yy}=1$ in der Kreisscheibe $B_R(0)$ mit der Randbedingung $u(x,y)=0$ auf dem Rand $\partial B_R(0)$.

1. Wir verwenden die Radialsymmetrie des Problems, d.h. die transformierte Lösung w ist nur von r abhängig, also $w(r,\varphi)=w(r)$. Es folgt also $\Delta u = w_{rr}+\frac{1}{r}w_r = 1$
2. Wir wählen den Ansatz $v(r)=rw_r$ und erhalten $v_r = w_r + rw_{rr}$.
3. Die originale PDG können wir auf beiden Seiten mit r mutliplizieren und erhalten $rw_{rr}+w_r = r \iff v_r = r$
4. $\displaystyle\int v_r \mathrm{d}r = \int r \mathrm{d}r \implies v(r) = \frac{1}{2}r^2 + B$
5. Da $v(r)=rw_r$ verwenden wir $v(r)$ aus dem vorherigen Schritt und berechnen $w_r = \frac{v(r)}{r} \implies \displaystyle\int w_r \mathrm{d}r = \int \frac{1}{2}r + \frac{B}{r} \implies w(r) = \frac{1}{4}r^2 + B\log(r) + C$
6. Da w im Ursprung definiert sein sollte wählen wir $B=0$ $(\log(0)=-\infty)$
7. Aus der Randbedingung $w(R)=0$ (Rand ist der Radius) folgt, dass $C=\frac{R^2}{4}$, also erhalten wir für die transformierte Lösung

$$\underline{\underline{w(r)=\frac{1}{4}(r^2-R^2)}} \overset{\text{(Rücktrafo)}}{\implies} \underline{\underline{u(x,y)=\frac{1}{4}(x^2+y^2-R^2)}}$$

Wichtiges zum Laplaceoperator und harmonischen Funktionen

- $\displaystyle\Delta\frac{f}{g} = \frac{\Delta f}{g} - \frac{f\Delta g}{g^2} + 2f\frac{g_x^2+g_y^2}{g^3} - 2\frac{f_x g_x + f_y g_y}{g^2}$
- $\displaystyle\Delta u = w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_{\varphi\varphi} = 0$
  - Transformation:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \end{aligned}$$

- Bei Anwendung von Kreiskoordinaten und Ansatz $w(r,\varphi)=\Phi(\varphi)R(r)$ hat man immer die Bedingung $\Phi(0)=\Phi(2\pi)$
  - Beispiel: Eine Lösung sei $\Phi(\varphi)=A\cos(\omega\varphi)+B\sin(\omega\varphi)$. Die Bedingung $\Phi(0)=\Phi(2\pi)$ ist genau dann erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} &\Phi(0) = A\cos(0)+B\sin(0) = A\cos(\omega 2\pi)+B\sin(\omega 2\pi) = \Phi(2\pi) \\ &\iff A = A\cos(\omega 2\pi) + B\sin(\omega 2\pi) \\ &\iff \omega 2\pi = n2\pi, \quad n\in\mathbb{N} \iff \omega = n \\ &\implies \underline{\Phi(\varphi) = A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi)} \end{aligned}$$

Transformierte Laplacegleichung und Separationsansatz

$$\Delta u = 0$$
$$\overset{\text{(Trafo)}}{\Longrightarrow} \Delta u = w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi} = 0$$
Separationsansatz: $w(r,\varphi) = R(r)F(\varphi)$
$$\Longrightarrow F(\varphi)\left[\ddot{R}(r) + \frac{1}{r}\dot{R}(r)\right] + \frac{1}{r^2}F''(\varphi)R(r) = 0$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} r^2\ddot{R}(r) + r\dot{R}(r) = -\lambda R(r) \\ F''(\varphi) = \lambda F(\varphi) \end{cases}$$
$$\text{oder} \begin{cases} r^2\ddot{R}(r) + r\dot{R}(r) = \lambda R(r) \\ F''(\varphi) = -\lambda F(\varphi) \end{cases}$$

Maximumprinzip

Schwaches Maximumsprinzip Sei Ω ein beschränktes Gebiet, u harmonisch ($\Delta u = 0$) in Ω und stetig in $\overline{\Omega}$. Dann wird das Maximum von u auf dem Rand angenommen.

Starkes Maximumsprinzip Nimmt eine harmonische Funktion u im Inneren ihres zusammenhängenden Definitionsbereich Ω ein Maximum an, so ist u eine Konstante

Mittelwerteigenschaft

Sei u harmonisch in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und einer Kreisscheibe $B_R \subset \Omega$ mit Radius R, Mittelpunkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ und Rand $\partial B = k_R$. Dann ist $u(x_0, y_0)$ gleich dem Mittelwert von u auf dem Kreis k_R

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos(\varphi), y_0 + R\sin(\varphi))d\varphi$$

Allgemeines

Integral von stückweise definierter Funktion

Sei die Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & x \in [-d,d] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = \chi_{[-d,d]}(x) \cdot \frac{1}{2d}$$
mit $d \in (0, \pi]$

Dann berechnet sich das Integral $\int_{-3\pi}^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-3\pi}^{3\pi} \chi_{[-d,d]}(x) \cdot \frac{1}{2d}\mathrm{d}x \overset{\text{Grenzen anpassen}}{=} \int_{-d}^{d} \frac{1}{2d}\mathrm{d}x = \dots$

Partielle Integration

Seien im folgenden u, v stetig differenzierbar.

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$
$$= \quad u \cdot v \quad - \int u \cdot v'$$

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) \, \mathrm{d}x = u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a) - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) \, \mathrm{d}x$$

Tipp: Wähle die einfacher zu integrierende Funktion als u' und die Funktion, deren Ableitung einfacher wird als v.

Watch out

- Wenn die Anfangsbedingung eine reine Cosinusreihe ist, dann beginnt die Reihe für die Lösung bei $n = 0$, da $cos(0) = 1$. Bei einer reinen Sinusreihe beginnt sie bei $n = 1$
- Achte auf die Anfangs- und Randbedingungen. Sei $u(0, y) = 1$ eine inhomogene Randbedingung und $u(x, 0) = 0$ eine homogene Anfangsbedingung. Sei der Ansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Dann wähle für die Lösung von $Y(y)$ den harmonischen Oszillator, denn dann kann man wegen der homogenen Anfangsbedingung die triviale Lösung ignorieren.

Fourierreihen

Fourierreihe:	$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\frac{2\pi}{T}t) + b_k \sin(k\frac{2\pi}{T}t) \quad c_k \in \mathbb{C} \quad a_k/b_k \in \mathbb{R}$
Fourierkoeffizienten:	$a_k = \frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\cos(k\frac{2\pi}{T}t)dt \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\sin(k\frac{2\pi}{T}t)dt$ $c_k = \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}dt$
f gerade: $f(t) = f(-t)$	$b_k = 0$ bzw $c_k = c_{-k}\ \forall k \qquad a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\frac{2\pi}{T}t)$
f ungerade: $f(t) = -f(-t)$	$a_k = 0$ bzw $c_k = -c_{-k}\ \forall k \qquad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\frac{2\pi}{T}t)$
Koeffizientenumrechnung:	$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & k < 0 \quad \|\| \quad a_0 = 2c_0 \\ \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & k > 0 \quad \|\| \quad a_k = c_k + c_{-k} \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \quad \|\| \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \end{cases}$
Fundamentalintegrale:	$\int_0^{2\pi} \sin(kt)dt = 0$ für $k \in \mathbb{Z} \qquad \int_0^{2\pi} \cos(kt)dt = 0$ für $k \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}$ $\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt = 0$ für $k \neq 0,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \int_{\|z\|=r} z^k dz = 0$ für $k \neq -1,\ k \in \mathbb{Z}$

Sonstiges

$\cos$ ist gerade $\implies \cos(x) = \cos(-x)$	$\sin$ ist ungerade $\implies \sin(x) = -\sin(x)$	$\cos(n\pi) = (-1)^n$	$\sin(n\pi + \pi/2) = (-1)^n$
gerade $\cdot$ gerade $=$ gerade	ungerade $\cdot$ ungerade $=$ gerade	gerade $\cdot$ ungerade $=$ ungerade	
Kosinusreihe $\implies$ gerade Fortsetzung (Periode verdoppeln, $b_k = 0 \forall k$	Sinusreihe $\implies$ ungerade Fortsetzung (Periode verdoppeln, $a_k = 0 \forall k$		

2.3 Tabelle der Grund- oder Stammintegrale

C, C_1, C_2: Reelle Integrationskonstanten

$\int 0 \, dx = C$	$\int 1 \, dx = \int dx = x + C$
$\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$	$\int \dfrac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$	$\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$	$\int \dfrac{1}{1 + x^2} \, dx = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$
$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$
$\int \dfrac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \tanh x + C$	$\int \dfrac{1}{\sinh^2 x} \, dx = -\coth x + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 + 1} \right\rvert + C$	
$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx = \operatorname{arcosh} \lvert x \rvert + C = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 - 1} \right\rvert + C \qquad (\lvert x \rvert > 1)$	
$\int \dfrac{1}{1 - x^2} \, dx = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \ln \left(\dfrac{1 + x}{1 - x} \right) + C_1 & \lvert x \rvert < 1 \\ & \text{für} \\ \operatorname{arcoth} x + C_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \ln \left(\dfrac{x + 1}{x - 1} \right) + C_2 & \lvert x \rvert > 1 \end{cases}$	

3.1.2 Spezielle Integralsubstitutionen (Tabelle)

Integraltyp	Substitution	Neues Integral bzw. Lösung	Beispiel
(A) $\int f(ax+b)\,dx$	$u = ax+b$ $dx = \dfrac{du}{a}$	$\dfrac{1}{a} \cdot \int f(u)\,du$	$\int \sqrt{4x+5}\,dx$ $(u = 4x+5)$
(B) $\int f(x) \cdot f'(x)\,dx$	$u = f(x)$ $dx = \dfrac{du}{f'(x)}$	$\dfrac{1}{2}\,[f(x)]^2 + C$	$\int \sin x \cdot \cos x\,dx$ $(u = \sin x)$
(C) $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx$ $(n \neq -1)$	$u = f(x)$ $dx = \dfrac{du}{f'(x)}$	$\dfrac{1}{n+1}\,[f(x)]^{n+1} + C$	$\int (\ln x)^2 \cdot \dfrac{1}{x}\,dx$ $(u = \ln x)$
(D) $\int f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx$	$u = g(x)$ $dx = \dfrac{du}{g'(x)}$	$\int f(u)\,du$	$\int x \cdot e^{x^2}\,dx$ $(u = x^2)$
(E) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$u = f(x)$ $dx = \dfrac{du}{f'(x)}$	$\ln\|f(x)\| + C$	$\int \dfrac{2x-3}{x^2-3x+1}\,dx$ $(u = x^2-3x+1)$
(F) $\int R\left(x; \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ R: Rationale Funktion von x und $\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a \cdot \sin u$ $dx = a \cdot \cos u\,du$ $\sqrt{a^2-x^2} = a \cdot \cos u$		$\int \dfrac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ $(x = 2 \cdot \sin u)$
(G) $\int R\left(x; \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ R: Rationale Funktion von x und $\sqrt{x^2+a^2}$	$x = a \cdot \sinh u$ $dx = a \cdot \cosh u\,du$ $\sqrt{x^2+a^2} = a \cdot \cosh u$		$\int \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ $(x = 3 \cdot \sinh u)$
(H) $\int R\left(x; \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ R: Rationale Funktion von x und $\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a \cdot \cosh u$ $dx = a \cdot \sinh u\,du$ $\sqrt{x^2-a^2} = a \cdot \sinh u$		$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$ $(x = 5 \cdot \cosh u)$

(I) $\int R(\sin x;\, \cos x)\, dx$ R: Rationale Funktion von $\sin x$ und $\cos x$	$u = \tan(x/2)$ $dx = \dfrac{2}{1+u^2}\, du$ $\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$ $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$		$\int \dfrac{1+\cos x}{\sin x}\, dx$
(J) $\int R(\sinh x;\, \cosh x)\, dx$ R: Rationale Funktion von $\sinh x$ und $\cosh x$	$u = e^x, \quad dx = \dfrac{du}{u}$ $\sinh x = \dfrac{u^2-1}{2u}$ $\cosh x = \dfrac{u^2+1}{2u}$		$\int \dfrac{\sinh x + 1}{\cosh x}\, dx$

0.1 Lösungsrezept für inhomogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Allgemeine Form einer inhomogenen linearen Differentialgleichung (I):

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_k x^{(k)}(t)) + x^{(n)} = K(t) \qquad \text{(I)}$$

Lösungsweg:

1. Löse die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung (H) $x_H(t)$
   (a) Setze Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ in (H) ein ($\lambda \in \mathbb{C}$)

   $$\begin{aligned} &\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(a_k \cdot \lambda^k \cdot e^{\lambda t}) + \lambda^n e^{\lambda t} = 0 \\ &\Longrightarrow e^{\lambda t} \text{ verschwindet} \\ &\Longrightarrow P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k = 0 \end{aligned}$$

   (b) Finde Nullstellen von $p(\lambda)(\lambda_1, \dots, \lambda_2)$ mit den zugehörigen Vielfachheiten $k_1, \dots, k_2$
   (c) Dann hat (H) die Lösung

   $$x_H(t) = \sum_{l=1}^{r}\sum_{i=0}^{k-1} c_{l_i} t^i e^{\lambda_l \cdot t}$$

2. Finde eine einzige partikuläre Lösung $x_P(t)$ von (I)
   (a) Bestimme m falls $K(t)$ folgende Form hat:

   $$\sum_{k=0}^{n-1}(a_k x^{(k)}(t)) + x^n = K(t)$$

   Beispiele: $t^2 \cdot \mathrm{e}^0 \implies m = 1, \qquad (1 + t^3) \cdot \mathrm{e}^{2t} \implies m = 2$
   (b) μ ist die k-fache Nullstelle von $P(\lambda)$. Falls μ keine Nullstelle von $P(\lambda)$ ist, gilt: $k = 0$
   (c) Wähle folgende partikuläre Lösung

   $$x_P(t) = (\sum_{i=0}^{m} c_i t^i) t^k \mathrm{e}^{\mu t}$$

   (d) Bestimme c_i durch Einsetzen in die Differentialgleichung aus der Aufgabenstellung. **Beachte** dabei die Ableitungen!

3. Die Lösung der Differentialgleichung lautet

   $$x_I(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

   (a) Falls $K(t) = \sum_{i=1}^{s} c_i K_i(t)$ ist, dann existieren mehrere partikuläre Lösungen und das *Superstitionsprinzip* tritt in Kraft:

   $$x_P(t) = \sum_{i=1}^{s} c_i x_{P,i}(t)$$

0.1.1 Beispiel: Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 3. Ordnung

Es sei eine Lösung $x(t)$ für die Differentialgleichung $x'''(t) - x''(t) = \mathrm{e}^{2t}$ zu finden.

1. Löse die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung $x_H(t)$:

$$\begin{aligned} & x'''(t) - x''(t) = 0 \\ \Longrightarrow\ & P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1) \\ \Longrightarrow\ & \lambda_1 = 0 \quad k_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1 \quad k_2 = 1 \\ \Longrightarrow\ & x_H(t) = c_1 t^0 \mathrm{e}^{0t} + c_2 t \mathrm{e}^{0t} + c_3 \mathrm{e}^t \\ \Longleftrightarrow\ & x_H(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t \end{aligned}$$

2. Finde eine partikuläre Lösung $x_P(t)$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} & x'''(t) - x''(t) = \mathrm{e}^{2t} \\ \Longrightarrow\ & m = 0, \mu = 2, k = 0 \text{ (keine Nullstelle)} \\ \Longrightarrow\ & x_P(t) = c_0 t^0 t^0 \mathrm{e}^{2t} = c_0 \mathrm{e}^{2t} \end{aligned}$$

Einsetzen in (I):

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ & 8c_0 \mathrm{e}^{2t} - 4c_0 \mathrm{e}^{2t} = e^{2t} \Longleftrightarrow c_0 = \frac{1}{4} \\ \Longrightarrow\ & x_P(t) = c_0 \mathrm{e}^{2t} = \frac{1}{4} e^{2t} \end{aligned}$$

3. Die Lösung der Differentialgleichung lautet

$$x_I(t) = \underline{\underline{\boldsymbol{x(t)} = c_1 + c_2 t + c_3 \mathrm{e}^t + \frac{1}{4} \mathrm{e}^{2t}}}$$

0.1.2 Komplexifizierung

$$\begin{aligned} & K(t) = \mathrm{Re}(\tilde{K}(t)) \\ \Longrightarrow\ & x_P(t) = \mathrm{Re}(\tilde{x}_P(t)) \end{aligned}$$

Beispiel $K(t) = \cos(t) = \mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}t})$

0.2 Lösungsrezept für gewöhnliche Differentialgleichungen

Allgemeine Form gewöhnlicher Differentalgleichungen:

$$x'(t) = f(x(t)) \qquad f \text{ stetig}$$

Lösungsweg:

1. Löse die homogene Gleichung durch Separation der Variablen. *Beispiel*: $x'(t) = 2tx^2 \iff x'(t) - 2x^2 t = 0$
   (a) Bringe gleiche Variablen auf eine Seite der Gleichung
   (b) Ersetze $x'(t)$ mit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$
   (c) Integriere beide Seiten und notiere die entstehende Integrationskonstante nur auf einer der beiden Seiten
   (d) Löse die Gleichung nach x auf und beachte, dass die Integrationskonstante jegliche Vorzeichen und Vorfaktoren verschluckt:
   $$\sqrt{\frac{-1}{C+t}} = \sqrt{\frac{1}{-C-t}} = \sqrt{\frac{1}{C-t}}$$
   (e) Entweder:
      - Finde partikuläre Lösung
      - Variation der Konstanten
        i. Löse zuerst die homogene Gleichung durch Separation der Variablen
        ii. Führe Variation der Konstanten durch, das heisst die Konstanten C werden zeitabhängig $(C(t))$ in die Differentialgleichung aus der Aufgabe eingesetzt.
        iii. **Beachte:** Die $C(t)$ Terme müssen sich aufheben nach dem Einsetzen
        iv. Integriere beide Seiten und notiere die entstehende Integrationskonstante nur auf einer der beiden Seiten
        v. Setze die berechnete Konstante in $x_H(t)$ ein

0.2.1 Beispiel: Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung mit Separation der Variablen

$$\begin{aligned}
x'(t) = 2tx^2 \iff \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2tx^2 \iff \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 2t\mathrm{d}t \\
\implies \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int 2t\mathrm{d}t \\
\iff -\frac{1}{x} = t^2 + C \\
\iff \underline{\underline{x = \frac{-1}{C+t^2}}}
\end{aligned}$$

0.2.2 Beispiel: Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung mit Variation der Konstanten

1. Löse Homogene Gleichung $x'(t) - \tanh(t) \cdot x(t) = 0$

$$\begin{aligned}
&\implies \text{Separation der Variablen} \\
&\implies \frac{\mathrm{d}x}{x} = \tanh(t)\mathrm{d}t \\
&\implies \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \tanh(t)\mathrm{d}t \\
&\iff \log(x) = \log(\cosh(t)) + C \\
&\iff x_H(t) = \cosh(t) \cdot \mathrm{e}^C \\
&\iff x_H(t) = \cosh(t) \cdot D \text{ (Konstante umb.)}
\end{aligned}$$

2. Variation der Konstanten: Konstante wird variabel

$$\begin{aligned}
&x_I(t) = D(t) \cdot \cosh(t) \implies \text{Einsetzen} \\
&\implies D'(t) \cdot \cosh(t) \\
&+ \underbrace{D(t)\sinh(t) - D(t)\cosh(t)\tanh(t)}_{=0} = 1 \\
&\iff D'(t)\cosh(t) = 1 \implies \text{Sep. d. Var.} \\
&\implies D'(t) = \frac{1}{\cosh(t)} \implies \int D'(t) = \int \frac{1}{\cosh(t)} \\
&\iff D(t) = 2\arctan(\mathrm{e}^t) + E \\
&\implies \text{Einsetzen in } x_H(t) \\
&\implies x_I(t) = x(t) = \cosh(2\arctan(\mathrm{e}^t) + E)
\end{aligned}$$